Γιάννης Π. Πλατάρος

«Για τους ορισμούς των **Στοιχείων** για το σημείο, γραμμή , πέρας, ευθεία γραμμή , γωνία, όρο, σχήμα, κύκλο, αναδρομή στα σχόλια του Sir Thomas Heath και στο αρχαίο κείμενο του Πρόκλου, **εις Ευκλείδην** και ανάπτυξη του περιεχομένου τους»

## Σχόλια του Heath για τον ορισμό του σημείου. (Ορισμός 1)

Ευκλείδης: « σημείον εστίν , ου μέρος ουθέν»

Αφού παραθέτει τον προηγούμενο ορισμό του σημείου κατά Ευκλείδη, μας πληροφορεί, ότι ένας παράλληλος ορισμός για το σημείο βρίσκεται στον Αριστοτέλη «Μετά τα Φυσικά» (1035b32)[1]

Αναφέρει ότι ο Bontz το μετέφρασε στον πληθυντικό αυτό το χωρίο , λέγοντας ότι το είδος διαιρείται σε μέρη. Και σύμφωνα με τα παραπάνω , θα μπορούσαμε να πούμε , ότι **ένα σημείο είναι αυτό που δεν είναι διαιρετό σε μέρη** .

Ο Μαρτιανός Κάπελλα μόνος , ή σχεδόν μόνος το μετέφρασε διαφορετικά: «Σημείο είναι αυτό, μέρος του οποίου είναι τίποτα» . Ο Max Simon υιοθέτησε την μετάφραση, αλλά σύμφωνα με τον Heath, δεν θεωρείται ότι αυτή η μετάφραση ανταποκρίνεται προς τα πράγματα, παραθέτοντας το επιχείρημα, ότι αν ο Ευκλείδης εσκέπτετο έναν τέτοιο ορισμό, (μέρος σημείου το «τίποτα») θα έπρεπε να είχε ορίσει εξ αρχής , ότι «σημείο είναι αυτό που τα μέρη του είναι τίποτα» , πράγμα που ο Ευκλείδης δεν έκανε.

Και συνεχίζει ο Heath:

---

[1]. –mšroj mὲν οὖν ἐ στˆ kaˆ toà e‡douj (εἶδος δὲ λέγω τὸ τί ἦν εἶναι) (εδώ ο Heath προφανώς αναφέρεται στην ορολογία του Αριστοτέλη που χρησιμοποιεί το «μέρος»)

**<u>Προευκλείδιοι Ορισμοί</u>**

Ο πρώτος ορισμός για το σημείο είναι Πυθαγόρειος (« μονάς προσλαβούσα θέσιν»[2]) , μια πληροφορία που την συναντάμε στον Πρόκλο ( σ.95, 21) . Αυτός ο ορισμός χρησιμοποιείται συχνά και από τον Αριστοτέλη («Μετά τα φυσικά»1016b 24)[3] και λέει ό,τι είναι με κάθε τρόπο αδιαίρετο ως προς το μέγεθος , αλλά δεν έχει θέση είναι η μονάδα, ενώ, αυτό το οποίο με τον ίδιο τρόπο είναι αδιαίρετο και έχει θέση, είναι το σημείο. Ο Πλάτωνας φαίνεται να έχει αντίρρηση σε αυτόν τον ορισμό, Ο Αριστοτέλης στα «Μετά τα φυσικά» (992a 20) λέει ότι έχει αντίρρηση στην εισαγωγή αυτού του γένους [των σημείων] ως να είναι γεωμετρικό δόγμα και αποκάλεσε σημείο την αρχή της γραμμής , ενώ συχνά ομιλεί και για αδιαίρετες γραμμές. [4]

Θα μπορούσε να γίνει φανερό, ότι όταν ο Αριστοτέλης έχει αντίρρηση στον ορισμό του σημείου , ως πέρας γραμμής, το κάνει διότι το θεωρεί αντιεπιστημονικό. (Τοπικά VI 141b 21)[5]

Ο Χάϊμπεργκ φρονεί , ότι οφείλεται στον Πλάτωνα που η λέξη στιγμή (την οποία χρησιμοποιεί συχνά ο Αριστοτέλης, αντικαταστάθηκε από την λέξη σημείο. (ο ενικός αριθμός [στιγμή] χρησιμοποιείτο από Ευκλείδη

---

[2] Το ακριβές χωρίον λέεει το εξής: «Ἐπεὶ dὲ καὶ οἱ Πυθαγό ρειοι τὸ σημεῖον ἀφορί - ζονται μονάδα προσλαβοῦσαν θέσιν, σκεπτέον τί ποτε νοοῦντες λέγουσιν»

[3]Παραθέτουμε και τις άλλες δύο γραμμές του αρχαίου κειμένου: τὸ mὲν π£ntV ka^ ¥qeton λέγεται μονάς, tÕ dὲ π£ntV ka^ qšsin œcon stigm», tÕ dὲ μοναχῇ γραμμή, tÕ dὲ διχῇ ἐ πί πεδον, tÕ dὲ π£ntV ka^ tricÍ diairetÕn kat¦ tÕ posÕn

[4] Παραθέτουμε το χωρίον 20-24 : . ἔ τι αἱ στιγμαὶ ™k t…noj ™nup£rxousin; toÚtJ mὲν οὖν τὼ γένει καὶ διεμάχετο Πλάτων ὡ ς ὄ ντι γεωμετρικῷ δό γματι, ἀλλ' ἐ κάλει ἀρχὴ ν γραμμῆς—toàto dὲ πολλ£kij ™t…qei—τὰς ἀτό μους γραμμάς. ka…toi ¢n£gkh toÚtwn eἶναί τι πέρας· ὥστ' ἐ ξ οὗ λό γου γραμμὴ ἔ στι, καὶ στιγμὴ ἔ στιν.

[5] Παραθέτουμε το πλήρες απόσπασμα από τον Αριστοτέλη ο οποίος ομιλεί για **«προθύστερον»** (=λαμβάνεται λανθασμένα το φυσιολογικά ύστερον , ως πρώτον , κάτι ανάλογον με την «λήψη του ζητουμένου» ) σχήμα στους ορισμούς: «εἰσὶ dὲ τῶν τοιού των ὁ ρισμῶν ὅ τε τῆς στιγμῆς καὶ ὁ τῆς γραμμῆς καὶ ὁ τοῦ ἐ πιπέδου· πάντες γὰρ διὰ τῶν ὑ στέρων τὰ πρό τερα δηλοῦσιν· tÕ mὲν γὰρ γραμμῆς, τὸ δ' ἐ πιπέδου, tÕ dὲ στερεοà fasi pšraj eἶναι.»

Αρχιμήδη και μεταγενέστερους.) Ο δεύτερος όρος (σημείο) πιθανόν να θεωρείται περισσότερο κατάλληλος από ό,τι ο όρος στιγμή, κάτι που φαίνεται να δίνει μεγαλύτερη οντολογική υπόσταση σε ένα σημείο.

Η αντίληψη του Αριστοτέλη ότι ένα σημείο είναι αδιαίρετο και έχει θέση, για έναν πρόσθετο λόγο είναι αληθινή, από παρατηρήσεις του τύπου ότι ένα σημείο δεν είναι σώμα[6] και δεν έχει βάρος[7] .

Ο Hence πιστεύει ότι τα σημεία δεν μπορούν να κατασκευάσουν τίποτα συνεχόμενο, όπως για παράδειγμα μια γραμμή.

Επ΄ αυτού έχουμε το σχετικό χωρίο που λέει ότι ένα σημείο , δεν μπορεί να συνεχίζεται με σημείο. ( « ου γαρ εστίν εχόμενον σημείον σημείου ή στιγμή στιγμής»[8])

Στα «Φυσικά» του Αριστοτέλη, έχουμε την απόφανση, ότι μία γραμμή δεν αποτελείται από στιγμές. («ου σύγκειται εκ στιγμών»[9])

Επίσης ο Αριστοτέλης μας λέει ότι ένα σημείο είναι όπως το «τώρα» στην στιγμή. Το τώρα είναι αδιαίρετο και δεν είναι μέρος της στιγμής.[10] Είναι μόνο η αρχή ή το τέλος ή μια διαίρεση του χρόνου και ομοίως, ένα σημείο , μπορεί να είναι ένα όριο, μια αρχή, ή διαίρεση μιας γραμμής , αλλά δεν είναι μέρος της ή γενικά μέρος οιουδήποτε μεγέθους.[11]

Αλλού ο Αριστοτέλης λέει ότι ένα σημείο μπορεί να παράξει μια γραμμή μόνο έπειτα από κίνηση.[12]

---

[6] Deca elo II.13,296a17

[7] ibid III.1209aII

[8] Gen et. Corr 1.2 317 a10

[9] (Physics IV 8,215b19

[10] Στην Ελληνική γλώσσα αυτό είναι προφανές.

[11] Deca ello III.1,300a14, Physics II222a1-21, VI.1 231b .g.s.qq

[12] de anima I.4 409a4 Το πλήρες πρωτότυπο χωρίον έχει ως εξής: « ἔ τι δ' ἐ πεί φασι κινηθεῖσαν γραμμὴ ν ἐ πί πεδον ποιεῖν, stigm¾n dὲ γραμμήν, καὶ αἱ τῶν μονάδων κινήσεις γραμμαὶ ἔ σονται·»

## Άλλοι Αρχαίοι ορισμοί

Σύμφωνα με έναν Nayrizi (έκδοση Curtze σελίδα 3) ένας άγνωστος «Ηρούνδης» (όχι όμως και τόσο γνωστός) όρισε το σημείο, ως αδιαίρετη αρχή όλων των μεγεθών . και ο Ποσειδώνιος ως το πέρας (όριο) που δεν έχει διάσταση ή ως το τέλος μια γραμμής.

## Κριτικές από σχολιαστές

Πρακτικά ο ορισμός του σημείου από τον Ευκλείδη , είναι σύμφωνος με τις αντιλήψεις του Αριστοτέλη , εκτός από την ασυμφωνία που λέει ότι το σημείο πρέπει να έχει θέση. Είναι όμως επαρκές αυτό , αν αναλογιστούμε ότι υπάρχουν κι άλλα πράγματα που είναι χωρίς μέρη ή αδιαίρετα (π.χ. το «τώρα»-στιγμή στον χρόνο και η μονάδα ως αριθμός;) Εδώ Πρόκλος απαντά: (93, 18) ότι το σημείο είναι το μόνο αντικείμενο της Γεωμετρία που είναι αδιαίρετο [13]
Επίσης ο ορισμός του Ευκλείδη , έχει δεχθεί πάρα πολλές αρνητικές κριτικές επειδή είναι αρνητικός . Κι εδώ ο Πρόκλος απαντά:( 94.10)[14]

---

[13] Το ακριβές πρωτότυπον χωρίον αναφέρει: «mÒnon oân tÕ shme‹on ¢merὲς κατὰ τ¾n gewmetρικὴ ν ὕλην καὶ ἡ μό νας κατὰ τὴ ν ἀριθμητικήν»

[14] Ὀ mὲν οὖν Εὐ κλεί δης διὰ τῆς ¢pof£sewj tîn μεριστῶν ἐ σήμηνεν ἡμῖν τὴ ν ἀρχὴ ν πάσης τῆς ὑ ποκειμένης αὐ τῷ φύ σεως εἰς θεωρί αν. καὶ γὰρ οἱ ἀποφατικοὶ λό γοι προσήκουσι ταῖς ἀρχαῖς, ὡ ς ὁ Παρμενί δης ἡμᾶ ς ἀναδιδάσκει τήν τε πρωτί στην αἰτί αν καὶ τὴ ν ἐ σχάτην διὰ μό νων τῶν ἀποφάσεων παραδούς. πᾶ σα γὰρ ἀρχὴ τῶν ἀπ' αὐ τῆς καθ' ἑτέραν οὐ σί αν ὑ φέστηκεν καὶ αἱ τούτων ἀποφάσεις τὴ ν ἐ κεί νης ἡμῖν δηλοῦσιν ἰδιό τητα. tÕ g¦r a‡tion mὲν τούτων, oÙdὲν dὲ τούτων Øp£rcon, ὧν αἴτιό ν ἐ στι, γνώριμον πῶς γί νεται διὰ τοῦ τρό που τούτου τῆς διδασκαλί ας.
Ἴσως δ' ἄν τις ἀπορήσειεν, πῶς πάντα μορφωτικῶς καὶ μεριστῶς τῆς φαντασί ας δεχομένης ἀμερές τι σημεῖον ὁ γεωμέτρης ἐ ν αὐ τῇ θεωρεῖ. μὴ γὰρ ὅ τι τοὺς ἐ ν διανοί ᾳ λό γους, ἀλλὰ καὶ τὰς τῶν νοερῶν καὶ θεί ων εἰδῶν ἐ μφάσεις ἡ φαντασί α κατὰ τὴ ν οἰκεῖαν δέχεται φύ σιν, tîn mὲν ¢mÒrfwn morf¦j tîn dὲ ἀσχηματί στων σχήματα προτεί νουσα. πρὸ ς δὴ ταύτην τὴ ν ἀπορί αν λέγομεν, ὅ τι τῆς φανταστικῆς κινήσεως

Ότι οι αρνητικές περιγραφές είναι καλύτερες κατά όσον αφορά τον ορισμό των πρώτων αρχών και ισχυρίζεται και ότι ο Παρμενίδης έχει περιγράψει την πρώτη και την τελευταία αιτία με αρνητικό τρόπο. Ο Αριστοτέλης παραδέχεται ότι μπορεί κάποιες φορές που κάποιος θέλει να διατυπώσει έναν ορισμό να το κάνει μέσω αρνήσεων (De anima III.6 430b .20)[15] «Το σημείο και κάθε διαίρεση [στο μέγεθος ή στον χρόνο] και οτιδήποτε είναι αδιαίρετο με αυτή την έννοια δηλούται ως στέρηση.
Ο Σιμπλίκιος (σύμφωνα με τον Nairizi ) λέει ότι ένα σημείο είναι η αρχή ενός μεγέθους και από αυτό αυξάνουν (τα μεγέθη) . Είναι επίσης το μόνο πράγμα το οποίο έχοντας θέση δεν είναι διαιρετό. Αυτός, όπως κι ο Αριστοτέλης , προσθέτει, ότι μόνο με την κίνησή του ένα σημείο μπορεί να παράξει ένα μέγεθος.Το πρωταρχικό μέγεθος μπορεί να είναι μία γραμμή , εφ΄όσον το σημείο δεν μπορεί να επεκτείνει τον εαυτό του.
Ο Σιμπλίκιος παρατηρεί , ότι ο Ευκλείδης, όριζε το σημείο αρνητικά, διότι έφθασε σε αυτό με την διαδικασία απόσπασης επιφάνειας από στερεό, γραμμής από επιφάνεια και –τέλος- σημείο από γραμμή. «Από τότε το στερεό έχει τρεις διαστάσεις και ακολουθεί ότι ένα σημείο (στο οποίο φθάνει αφού έχει περιορίσει διαδοχικά και τις τρεις διαστάσεις) ότι δεν έχει καμία διάσταση και κανένα μέρος.»
Αυτό φυσικά επανεμφανίζεται σε μοντέρνες θεμελιώσεις της γεωμετρίας: Ένας Nairizi προσθέτει μια ενδιαφέρουσα παρατήρηση:
«Αν ένας θέλει να μάθει την σπουδαιότητα ενός σημείου, δηλ. ένα πράγμα περισσότερο απλό από ό,τι μια γραμμή, άφησέ τον να πιστεύει στο κέντρο του σύμπαντος και στους πόλους[16]. Αλλ΄ ουδέν καινόν υπό

---

[15] Το σχετικό χωρίον έχει ως εξής: «<τὸ dὲ μὴ κατὰ τὸ ποσὸ ν ἀδιαί ρετον ἀλλὰ τῷ εἴδει νοεῖ ἐ ν ἀδιαιρέτῳ χρό νῳ καὶ ἀδιαιρέτῳ <τῳ> τῆς ψυχῆς.>
¹ dὲ στιγμ¾ ka^ p©sa dia…resij, καὶ
τὸ οὕ τως ἀδιαί ρετον, δηλοῦται ὥσπερ ἡ στέρησις»

[16] αντιδιαμετρικά σημεία σφαίρας

τον ήλιον : Η ίδια η ιδέα που αναφέρεται, είναι Αριστοτελικής εμπνεύσεως, όπου ο Αριστοτέλης αντικρούοντας αυτούς που φαντάζονται ότι οι πόλοι έχουν κάποια επιρροή στην κίνηση κάποιας σφαίρας («Όταν οι πόλοι δεν έχουν μέγεθος, αλλά είναι άκρα και σημεία») ( De motu animalium 3,669 a 21.)[17]

**<u>Σύγχρονες απόψεις:</u>**

Στην σύγχρονη Γεωμετρία, έχουμε έξοχες θεμελιώσεις που βασίζονται στο νέο σύστημα της αξιωματικής θεμελίωσης το οποίο υπήρξε κατάκτηση κατά την διάρκεια των τελευταίων[18] ετών. Χρειάζεται μόνο να αναφέρουμε τον Pasch , Veronese, Enriques , και Hilbert . Εδώ τα σημεία θεμελιώνονται (ορίζονται) πριν τις γραμμές. Η αμυδρή προσπάθεια να τα ορίσουμε a priori δεν είναι εφικτή. Αντί γι αυτό, τα πιο κοντινά πράγματα στην φύση, που αναφέρονται σε αυτά είναι αυτά που μας βοηθούν να αποκρυσταλλώσουμε μια αντίληψη και μια ιδέα γι΄αυτά.

Η πλήρης αναφορά –δήλωση που αφορά στην αντίληψη ενός σημείου, στον Weber και Wellstein έχει ως εξής:

Η αντίληψή μας για το σημείο, μπορεί να εξελιχθεί στην αντίληψη ενός αληθινού ή υποτιθέμενου υλικού σημείου, με την διαδικασία των ορίων. Για παράδειγμα, αυτό μπορεί να γίνει με τον εγκέφαλό μας που θέτει ένα όριο σε απεριόριστες προσεγγίσεις. Αν υποθέσουμε ότι ένας κόκκος άμμου γίνεται όλο και διαρκώς μικρότερος . Με αυτό τον τρόπο εξαλείφεται η πιθανότητα ύπαρξης ακόμη μικρότερων ατόμων στον

---

[17] Το πρωτότυπο χωρίον είναι το εξής: «ἀλλ' ὅ τι τοὺς πό λους οἴονταί τινα δύναμιν ἔ χειν, oÙqὲν œcontaj mšgeqoj ¢ll' ὄ ντας ἔ σχατα καὶ στιγμάς»

[18] σε σχέση με την χρονολογία της έκδοσης των σχολίων του Heath (1952)

κόκκο της άμμου. Έτσι διαμορφώνεται η ιδέα –με περισσότερη σιγουριά- η θεώρηση του σημείου ως μια ορισμένη θέση στον χώρο, μοναδική, και μη επιδεχόμενη περαιτέρω διαιρέσεως. Αλλά βέβαια κι αυτή η θεώρηση είναι ελαττωματική. Είναι αλήθεια , ότι έχουμε μια ιδέα, ότι ο κόκκος της άμμου γίνεται όλο και διαρκώς μικρότερος , ώστε να γίνεται ελάχιστα ορατός. Μετά από αυτό το σημείο, είμαστε ουσιαστικά σ το σκοτάδι. Δεν είναι δυνατόν να φανταστούμε πώς γίνεται μεγαλύτερη μείωση των κόκκων. Το ότι αυτή η διαδικασία θα τελειώσει, είναι αδιανόητη. Παρ όλα ταύτα, υπάρχει ένα όριο, πέρα από το οποίο , δεν μπορώ να πάω. Εμείς πρέπει να πιστέψουμε σ΄ αυτό ή να το ζητήσουμε (αιτηθούμε) , χωρίς να έχουμε φθάσει ποτέ σ΄ αυτό. Αυτό είναι καθαρά μια πράξη αποχής (θέλησης) κι όχι μια πράξη κατανόησης.
Ο Max Simon παρατηρεί, ότι κατανόηση του σημείου ανήκει στα όρια της αντίληψης του ανθρώπου.

**Ορισμός 2**

Ευκλείδης: «Γραμμή δε , μήκος απλατές»

Ο Heath παρατηρεί , ότι αυτός ο ορισμός μπορεί να αποδοθεί στην Πλατωνική σχολή , αν όχι στον ίδιο τον Πλάτωνα. Ο Αριστοτέλης (Τοπικά VI.6, 143b11) αναφέρεται σε αυτόν , ως να είναι ανοικτός σε αμφισβητήσεις , διότι αυτός ο ορισμός «διαιρεί το γένος με άρνηση» (δηλ. ότι η γραμμή είναι χωρίς πλάτος) . Εκτιμά ο Heath , ότι αυτή την αντίρρηση την έθεσε για να πάρει πόντους έναντι των Πλατωνιστών. (ibid 143b29)

**Εναλλακτικοί ορισμοί.**

Σύμφωνα με τον Πρόκλο είναι «μέγεθος εφ΄έν διαστατόν» (αφού η λέξη διάσταση χρησιμοποιείται σε σχέση με την γραμμή την επιφάνεια και το στερεό. (Αυτό σπάνια αποδίδεται έτσι) «Ένας Nairizi» το αποδίδει στον «Ηρωμίδη» (που πρέπει να είναι ο «Ηρούνδης» στον οποίο πάλι ο Ναιριζί απέδωσε άλλο ορισμό του σημείου όπως προαναφέραμε)
Επίσης αναφέρεται στην άποψη του Αριστοτέλη ότι η γραμμή είναι μέγεθος διαιρετό με ένα τρόπο («μοναχή διαιρετόν») σε αντίθεση με τα μεγέθη που είναι διαιρετά με δύο τρόπους («διχή διαιρετόν») που είναι μια επιφάνεια ή στερεό που είναι διαιρετό με όλους ή με τους τρεις τρόπους («παντί και τριχή διαιρετόν») (Μετά τα φυσικά 1016b25-27)[19] και (Μετά τα φυσικά 1020 a11)[20]
Επίσης αναφέρεται στο λεχθέν υπό του Πρόκλου για «ρύσιν σημείου) που την αποδίδει στον Αριστοτέλη (De anima I.4 409a4)[21]
Επίσης αναφέρεται σε μνεία που κάνει ο Πρόκλος σχετικά με τον Απολλώνιο (100, 5-19)[22]

[19] Το σχετικό χωρίο: «τὸ mὲν πάντῃ καὶ ἄθετον λέγεται μονάς, τὸ dὲ πάντῃ καὶ θέσιν ἔ χον στιγμή, τὸ dὲ μοναχῇ γραμμή, τὸ dὲ διχῇ ἐ πί πεδον, τὸ dὲ πάντῃ καὶ τριχῇ διαιρετὸ ν κατὰ τὸ ποσὸ ν σῶμα· καὶ ἀντιστρέψαντι δὴ τὸ mὲν διχῇ διαιρετὸ ν ἐ πί πε-δον, τὸ dὲ μοναχῇ γραμμή, τὸ dὲ μηδαμῇ διαιρετὸ ν κατὰ τὸ ποσὸ ν στιγμὴ καὶ μονάς, ἡ mὲν ἄθετος μονὰς ἡ dὲ θετὸ ς στιγμή.»

[20] Το σχετικό χωρίο από τον Αριστοτέλη έχει ως εξής: «Ποσὸ ν λέγεται τὸ διαιρετὸ ν εἰς ™nup£rconta ïn ˜k£teron À ›kaston ›n ti ka^ tÒde ti pšf uken eἶναι. πλῆθος mὲν οὖν ποσό ν τι ἐ ὰν ¢riqmhtÕn Ï, mšgeqoj dὲ ἂν μετρητὸ ν ᾖ. l šgetai dὲ πλῆθος μὲν τὸ διαιρετὸ ν δυνάμει εἰς μὴ συν-εχῆ, mšgeqoj dὲ τὸ εἰς συνεχῆ· megšqouj dὲ τὸ μὲν ἐ φ' εn sunecὲς μῆκος τὸ δ' ἐ πὶ δύο πλάτος τὸ δ' ἐ πὶ τρί α βάθος. toÚtwn dὲ πλῆθος μὲν τὸ peperasmšnon ¢riqmÕj mÁkoj dὲ γραμμ¾ pl £toj dὲ ἐ πιφ£neia b£qoj dὲ σῶμα»

[21] Το ακριβές χωρίον: «ἐ πεί φασι κινηθεῖσαν γραμμὴ ν ἐ πί πεδον ποιεῖν, stigm¾n dὲ γραμμήν, καὶ αἱ τῶν μονάδων κινήσεις γραμμαὶ ἔ σονται·»

[22] Το ακριβές χωρίον κι εδώ έχει ως εξής: «ἔ χειν λέγεται. Τοσαῦτα περὶ τῆς γραμμῆς εἰρήσθω κατὰ τὰς θεωρικωτέρας ἐ πιβολάς. ἀποδεξώμεθα dὲ καὶ τοὺς περὶ ᾿Απολλώνιον λέγοντας, ὅ τι γραμμῆς ἔ ννοιαν mὲν ἔ χομεν, ὅ ταν τὰ μήκη μό νον ἢ τῶν ὁ δῶν ἢ τῶν τοί χων ἀναμετρεῖν κελεύ ωμεν· οὐ γὰρ προσποιού μεθα τό τε τὸ πλάτος, ἀλλὰ τὴ ν ἐ φ' ž ν διάστασιν ἀναλογιζό μεθα, καθάπερ δὴ καὶ ὅ ταν χωρί α μετρῶμεν, τὴ ν ἐ πιφάνειαν ὁ ρῶμεν, ὅ ταν dὲ φρέατα, τὸ στερεό ν. πάσας γὰρ ὁ μοῦ τὰς διαστάσεις συλλαβό ντες ἀποφαι-νό μεθα τοσό νδε eἶναι τὸ διάστημα τοῦ φρέατος κατά τε μῆκος καὶ πλάτος καὶ βάθος. αἴσθησιν dὲ αὐ τῆς λάβοιμεν ἂν ἀπιδό ντες εἰς τοὺς διορισμοὺς τῶν πεφω-τισμένων τό πων ἀπὸ τῶν ἐ σκιασμένων καὶ ἐ πὶ τῆς σελήνης καὶ ἐ πὶ τῆς γῆς. τοῦτο γὰρ τὸ μέσον κατὰ mὲν πλάτος ἀδιάστατό ν ἐ στι, μῆκος dὲ ἔ χει τὸ συμ-παρεκτεινό μενον τῷ φωτὶ καὶ τῇ σκιᾷ.»

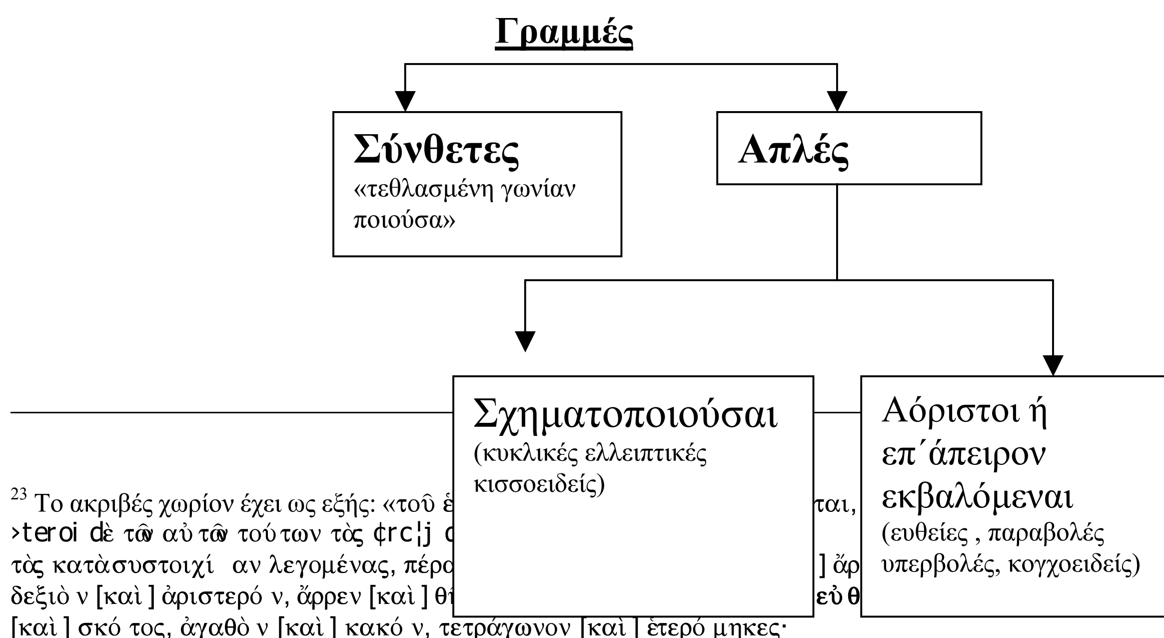
## Είδη γραμμών:

Ο Ευκλείδης, δεν θεώρησε αναγκαίο τον διαχωρισμό των γραμμών σε είδη, ενώ αντίθετα ο Ήρων τις ταξινομεί σε ευθείες και μη. Μια περαιτέρω διαίρεση των «και μη» σε ελικοειδής και κυκλοειδείς καμπύλες . αναφέρεται στον Αριστοτέλη που λέει για τους Πυθαγόρειους ότι έλεγαν τους όρους ευθύ και καμπύλο ( Μετά τα φυσικά $986^{\alpha}25$)[23] . Επίσης αυτή η διάκριση φαίνεται και στην Πολιτεία του Πλάτωνα (Republix 602 c) [24]

Επίσης αναφέρεται στην ταξινόμηση που έκανα οι Αριστοτέλης και Πλάτων σε **ευθείες, περιφερείς και μικτές.**

Παραθέτει δε τις ταξινομήσεις κατά Γέμινο ($1^{η}$ και $2^{η}$ , που είναι οι εξής)

## Πρώτη , κατά Γέμινον ταξινόμηση

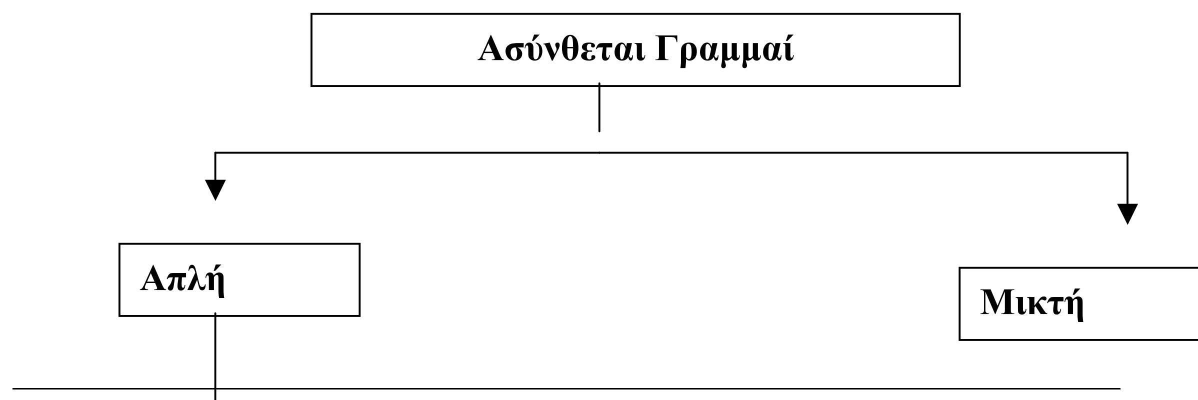


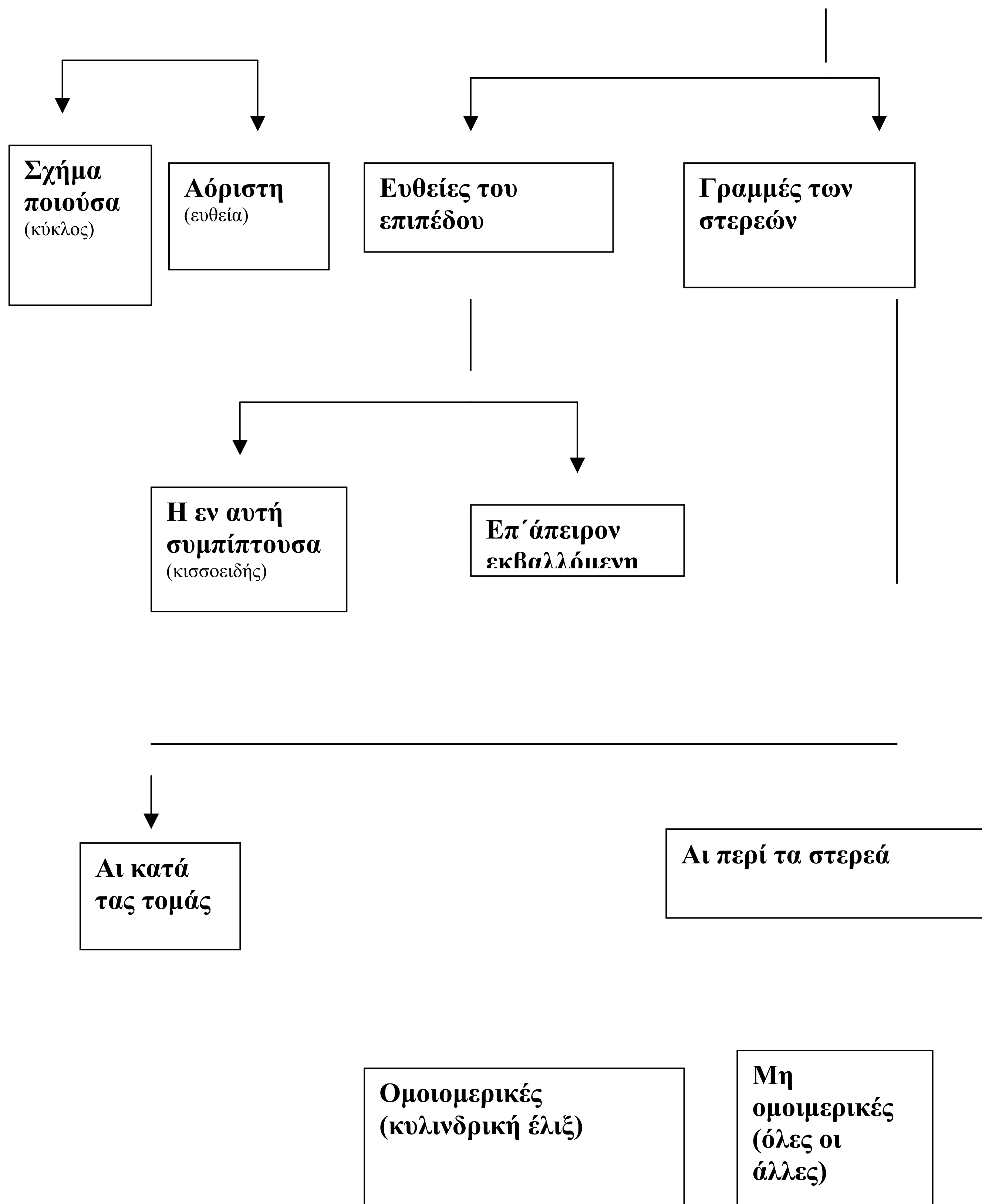

[23] Το ακριβές χωρίον έχει ως εξής: «τοῦ έ … ται,
›teroi dὲ τῶν αὐτῶν τούτων τὰς ¢rc¦j c …
τὰς κατὰσυστοιχί αν λεγομένας, πέρα … ] ἄρ
δεξιὸ ν [καὶ ] ἀριστερό ν, ἄρρεν [καὶ ] θ … εὐθ
[καὶ ] σκό τος, ἀγαθὸ ν [καὶ ] κακό ν, τετράγωνον [καὶ ] ἑτερό μηκες·

[24] «Καὶ ταὐτὰ καμπύλα τε καὶ εὐθέαί …..»

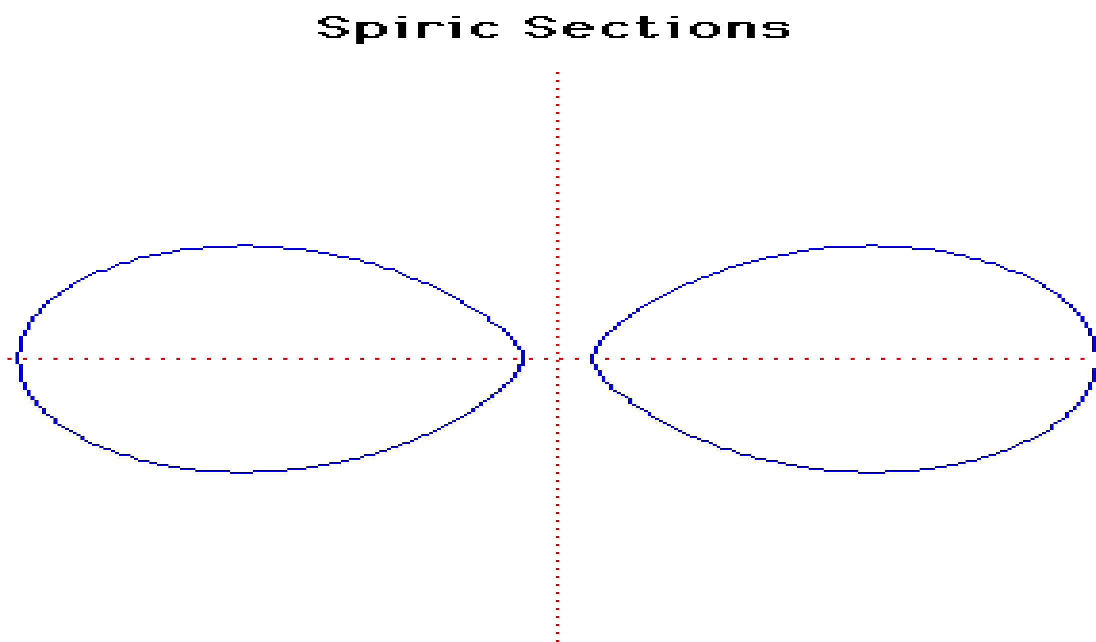
Κάποιες λεπτομέρειες που δεν μπορούν να αποδοθούν στο διάγραμμα είναι ότι μερικές «επ΄άπειρον εκβαλλόμενες» δεν σχηματίζουν σχήμα (ευθεία παραβολή υπερβολή) ενώ κάποιες άλλες σχηματίζουν βρόγχο και οι άλλες (της οικογένειάς τους) εκβάλλονται επ΄άπειρον. (κογχοειδής του Νικομήδη , την οποία είχε χρησιμοποιήσει ο Νικομίδης για τον διπλασιασμό του κύβου και την τριχοτόμηση τυχούσας γωνίας))

**<u>Δεύτερη , κατά Γέμινον ταξινόμηση:</u>**




Σχήμα ποιούσα
(κύκλος)
Αόριστη
(ευθεία)
Ευθείες του επιπέδου
Γραμμές των στερεών
Η εν αυτή συμπίπτουσα
(κισσοειδής)
Επ΄άπειρον εκβαλλόμενη
Αι κατά τας τομάς
Αι περί τα στερεά
Ομοιομερικές (κυλινδρική έλιξ)
Μη ομοιμερικές (όλες οι άλλες)

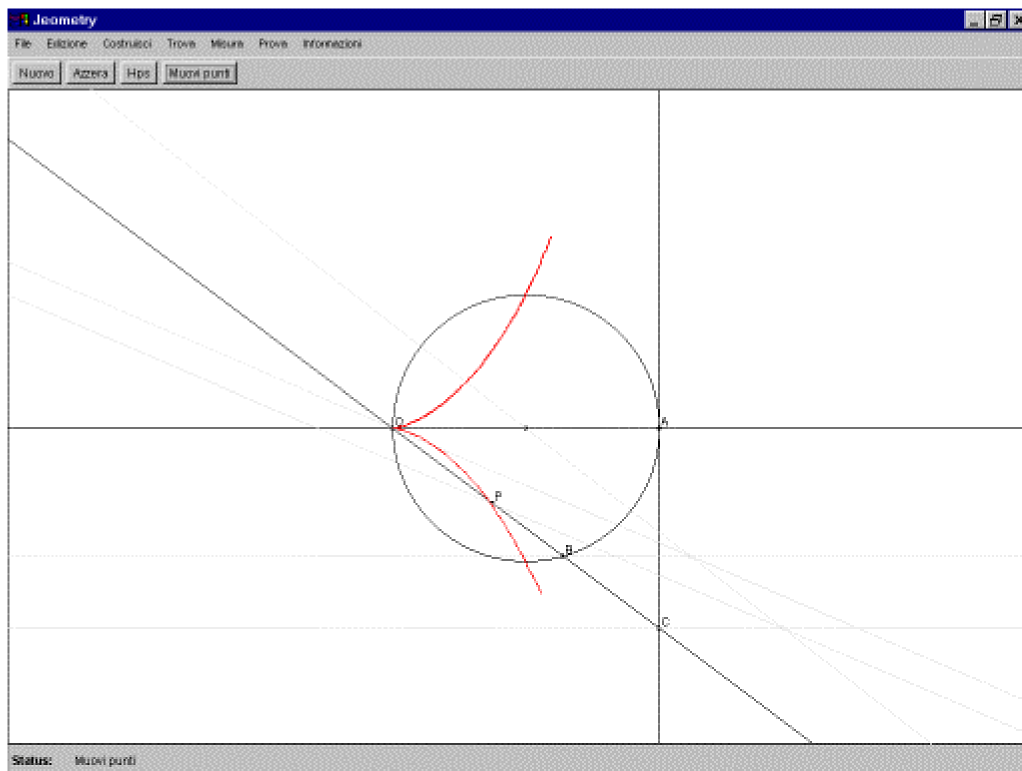
Ομοιοερικές ή ομοιομερείς λέγονται αυτές που είναι όμοιες σε όλα τα μέρη τους υπότην έννοια ένα μέρος τους να μπορεί να συμπίπτει με κάποιο άλλο. (ευθεία, τόξα του ιδίου κύκλου) εδώ έχομε δύο απλές, (ευθεία και κύκλο) και μια μεικτή (κυλινδρική έλιξ- κοχλιοειδής)

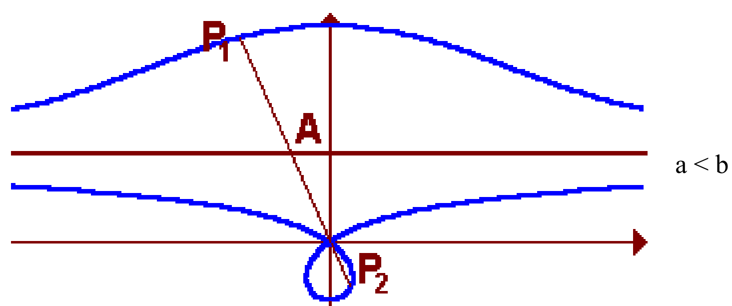


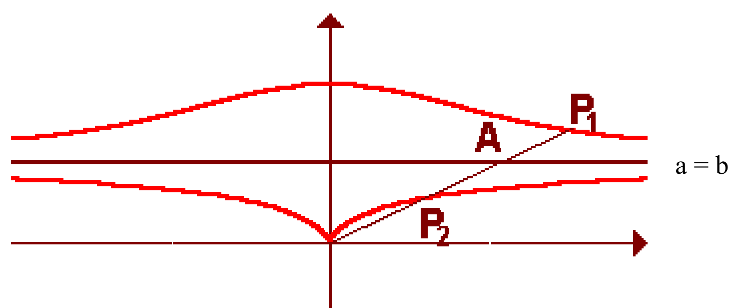

Ιπποπέδη καμπύλη έχουσα εξίσωση$(r^2 - a^2 + c^2 + x^2 + y^2)^2 = 4r^2(x^2 + c^2)$

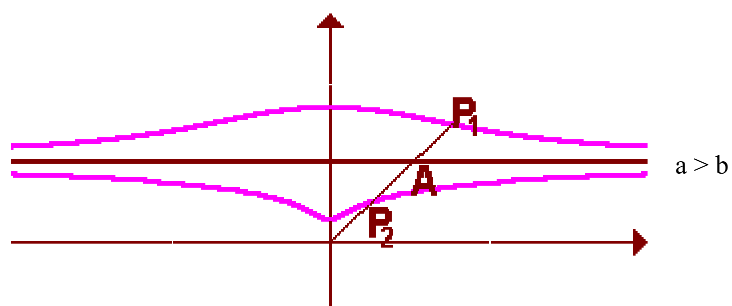
Μια άλλη ιστορική καμπύλη , **η κισσοειδής του Διοκλέους** με εξίσωση: $y^2(a - x) = x^3$

Είναι η παρακάτω:


Jeometry
File Edizione Costruisci Trova Misura Prova Informazioni
Nuovo Azzera Hps Muovi punti
O
A
P
B
C
Status: Muovi punti


P1
A
P2
a < b


P1
A
P2
a = b


P1
A
P2
a > b

Εξισωση:

$$(y - a)^3 \cdot (x^2 + y^2) = b^2 - y^2$$

$$b = |AP_1| = |AP_2|$$

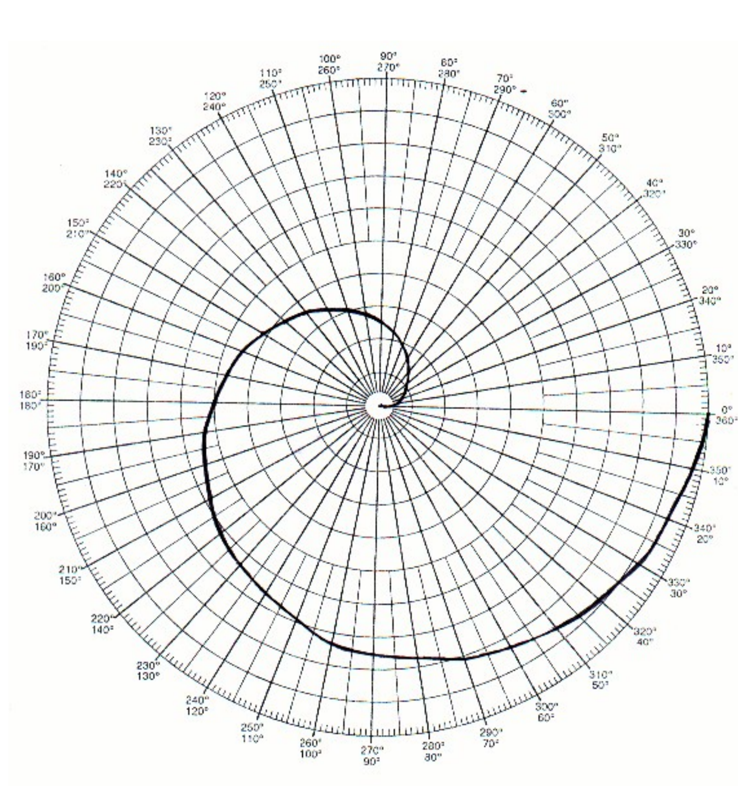
το μήκος b είναι σταθερό κατά μέγεθος, η δε $P_1P_2$ στρέφεται γύρω από το

Ο . Ο Γ. Τ. των $P_1$ και $P_2$ είναι η κογχοειδής.

ασύμπτωτη:

$$y = a$$

Τρεις περιπτώσεις για την **Κογχοειδή του Νικομήδη** .



**Έλιξ του Αρχιμήδους**

## <u>Ορισμός 3</u>

«Γραμμής δε πέρατα, σημεία»

Εδώ ο Αριστοτέλης μας λέει ότι είναι αντιεπιστημονικό, να ορισθεί ένα σημείο ως πέρας γραμμής, διότι έχουμε διάπραξη προθύστερου σχήματος , ορίζοντας το πρότερον , ύστερον[25] Ο Ευκλείδης λοιπόν, εισήγαγε τον ορισμό ενός σημείου διαφορετικά , και επειδή έπρεπε να ενώσει σημείο με γραμμή εισήγαγε αυτή την εξήγηση, αφού δόθηκαν ορισμοί και για τα δύο.Αυτός ο συμβιβασμός είναι δική του ιδέα χωρίς αμφιβολία . Το ίδιο συμβαίνει και σε μια επιφάνεια σε σχέση με γραμμή (για τα πέρατα) όπως και σε σχέση ενός στερεού με μια επιφάνεια . Εμείς έτσι χάνουμε μια αναφορά , ότι μια διαίρεση γραμμής εκτός από την αρχή καιτο τέλος της, ότι είναι ένα σημείο. Ο Αριστοτέλης μας λέει ότι η τομή δύο ευθειών είναι σημείο (Μεταφυσικά 1060 b15)[26]
αν αυτές οι εξηγήσεις είχαν δοθεί, τότε ο Πρόκλος θα είχε ξεπεράσει τις δυσκολίες που βρίσκει , ότι κάποιες από τις γραμμές που χρησιμοποιεί ο Ευκλείδης, (Αόριστες και κυκλικές) δεν έχουν πέρατα. Επίσης η καμπύλη που ο Πρόκλος ονομάζει «θυρεό» (=έλλειψη) δεν θα είχε δυσκολία.
Τελικά ο Πρόκλος φρονεί, ότι κατ΄ουσίαν ο Ευκλείδης μας δηλώνει , ότι μια γραμμή(ευθ. τμήμα) έχει πέρατα κι αυτά είναι σημεία.

[25] βλέπε και υποσημείωση υπ΄αριθμ.5
[26] («aƒ dè στιγμαˆ [εννοειται ειναι τομαι] γραμμων»),

**Ορισμός 4**

*Ευθεία γραμμή έστιν, ήτις εξ ίσου τοις εφ'αυτής σημείοις κείται.*

Ο μόνος ορισμός της ευθείας που μπορεί να χαρακτηριστεί προευκλειδικός είναι αυτός του Πλάτωνα ο οποίος ως ευθεία ορίζει τη γραμμή της οποίας το μέσον καλύπτει τα ακρα ( αν υποθεσουμε ότι κάποιος μπορεί να κοιτάξει κατα μήκος της ευθείας και από τα δύο της άκρα ). Ο ίδιος ορισμός κάνει επίσης την εμφάνισή του στον Παρμενίδη 137 Ε ως εξής : ευθεία είναι οποιδήποτε γραμμή της οποίας το μεσο βρίσκεται μπροστά (έτσι ώστε να εμποδίζει τη θέα τους) και από τα δύο άκρα της (ευθύ γε ου αν το μέσον αμφοίν τοιν εσχάτοιν επίπροσθεν η). Ο Αριστοτέλης παραθέτει το άνωθεν με ανάλογους όρους (κεφ. VI.II, 148b 27): ου το μέσον επιπροσθεί τοις πέρασιν. Το γεγονός ότι δεν αναφέρει το όνομα του Παρμενίδη όπως επίσης και το ότι παραθέτει τον ορισμό σε συνδυασμό με τον ορισμο της ευθείας ως το άκρο μιας επιφάνειας, μας αφήνει να υποθέσουμε ότι οι ορισμοί αυτοί ήταν εξαιρετικά γνωστοί. Ο Proclus επίσης αναφέρεται στον ορισμό αυτό με όρους του Πλάτωνα: ης τα μέσα τοις άκροις επιπροσθεί. Ο ορισμός αυτός είναι ευφυής αλλά σχετίζεται με την αίσθηση της όρασης και επικαλείται το(ως) αξίωμα ότι η γραμμή της όρασης είναι ευθεία (Cf. The aristotelian problems 31, 20, 959, 39 όπου προκύπτει το ερώτημα γιατί μπορούμε να παρατηρήσουμε καλύτερα την ευθύτητα /ευθυγράμιση σε μια σειρά πχ γραμμάτων με το ένα μάτι παρά και με τα δύο μαζί.) Αναφορικά με την ευθύτητα /με το κατά πόσο είναι ευθείες των 'οπτικών ακτίνων', *όψεις*, cf. ο Ευκλείδης στα Οπτικά του υιοθετεί τον όρο *υπόθεσις* και είναι ο πρώτος που κανει λόγο για 'ευθείες γραμμές' εικονικά προεκτεινόμενες απ'τα μάτια χωρίς

να χρησιμοποιεί τη λέξη *όψεις* και υποστηρίζει πως στο σύνολό τους δίνουν σχήμα κώνου του οποίου η κορυφή βρίσκεται στα μάτια

Καθώς ο Αριστοτέλης δεν αναφέρει κανένα ορισμό της ευθείας παρόμοιο με του Ευκλείδη παρά μόνο αυτόν του Πλάτωνα και αυτόν που ορίζει την ευθεία ως ‘άκρο μιας επιφάνειας’ δεν μπορούμε να αμφισβητήσουμε ότι ο ορισμός του Ευκλείδη ανήκει αποκλειστικά σε αυτόν και σημείο ‘εφόρμησης’ για τον μαθηματικό

## **<u>Η τοποθέτηση του Προκλου πάνω στον ορισμό του Ευκλείδη</u>**

Οι ερμηνείες του ορισμού του Ευκλείδη ( ευθεία γραμμή έστιν, ήτις εξ ίσου τοις εφ’ εαυτής σημείοις κείται) είναι πολλές σε αριθμό αλλά καμιά αρκετά ικανοποιητική ώστε να την αναφέρουμε. Μερικές αυθεντίες μάλιστα όπως πχ ο Savile έχουν ομολογήσει πως δεν μπορούν να κατανοήσουν πλήρως τον ορισμό ώστε να κάνουν περαιτέρω χρήση του. Είναι αρκετά φυσικό ο Πρόκλος να είναι ο πρώτος που ασχολήθηκε και διαπιστώνουμε ότι όντως η ερμηνεία του με την πρώτη ματιά φαίνεται αληθοφανής και γίνεται πειστική. Υποστηρίζει πως ο Ευκλείδης « αποδεικνύει με τον τρόπο αυτό ότι μόνο η ευθεία γραμμή καταλαμβάνει απόσταση (*κατέχειν διάστημα*) ίση με αυτή ανάμεσα στα σημεία της.» Γιατί, όσο τα σημεία της απέχουν μεταξύ τους, τόσο μεγάλο είναι και το μήκος (*μέγεθος*) της ευθείας της οποίας αποτελούν τα πέρατα.( Η απόσταση μεταξύ των σημείων μιας ευθείας της οποίας αποτελούν και τα πέρατα καθορίζει και το μήκος της ευθείας) Και αυτό ακριβώς αποτελεί και την ερμηνεία του *εξ ίσου* ως προς τα σημεία της ευθείας (το εξ ίσου επομένως/εμφανώς πρέπει να ερμηνευθεί ως ίση απόσταση) . «Όμως αν πάρεις δύο σημεία περιφέρειας κύκλου ή

οποιασδήποτε άλλης γραμμής και απομονώσεις την απόσταση μεταξύ τους πάνω στη γραμμή του θα διαπιστώσεις ότι αυτή είναι μεγαλύτερη το διάστημα που τα χωρίζει. Και αυτό συμβαίνει με όλες τις γραμμές εκτός της ευθείας. Από αυτό προκύπτει/εξ'ου και η συνήθης παρατήρηση, βασισμένη στην κοινή λογική, ότι αυτός που ταξιδεύει σε ευθεία γραμμή διανύει μόνο την απαραίτητη απόσταση ενώ αυτός που δεν ταξιδεύει ευθεία διανύει μεγαλύτερο διάστημα από το απαραίτητο.» ( Cf Aristotle, De Caelo I, 4,27I a 3I, πάντα απόσταση θεωρούμε την ευθεία που μας χωρίζει από το σημείο στο οποίο αναφερόμαστε). Επομένως ο Πρόκλος θα ερμήνευε τον ορισμό κάπως έτσι: ευθεία είναι η γραμμή η οποία έχει έκταση ίση με ( τις αποστάσεις που χωρίζουν) τα σημεία της. Αυτή η ερμηνεία μοιάζει να προσπαθεί να εμβολίσει στον ορισμό του Ευκλείδη την *υπόθεση* του Αρχιμήδη ( *Σχετικά με τη σφαίρα και τον κύλινδρο I, ad init* ) ότι από όλες τις γραμμές που έχουν τα ίδια άκρα η ευθεία είναι η μικρότερη. Για το λόγο αυτό το *εξ ίσου* πρέπει σαφώς να ερμηνευθεί ως 'ίση απόσταση' και το *κείται εξ ίσου* να θεωρηθεί αντίστοιχο του ΄εκτείνεται σε ίση απόσταση' ή 'αντιπροσωπεύει ίση απόσταση'. Αυτή η ερμηνεία είναι δύσκολη από μόνη της αλλά φαίνεται αδύνατη αν προσπαθήσουμε να την εφαρμόσουμε στον παρόμοιο ορισμό που έχει δώσει ο Ευκλείδης (Def7) για το επίπεδο ως επιφάνεια 'η οποία κείται εξ ίσου από τις ευθείες γραμμές που την αποτελούν '. Όσον αφορά αυτό τον ορισμό ο Πρόκλος τις ίδιες λέξεις ,*εξ ίσου κείται* , προσπαθεί να τις ερμηνεύσει ως 'εκτείνεται σε επιφάνεια/καταλαμβάνει χώρο ίσο με'. Υποστηρίζει δηλαδή (ρ.117,2) ότι, «εάν δύο ευθείες γραμμές ορισθούν πάνω σ'ένα επίπεδο, η επιφάνεια του επιπέδου θα καταλαμβάνει χώρο ίσο με αυτόν που βρίσκεται ανάμεσα στις δύο ευθείες γραμμές». Δύο ευθείες όμως από μόνες τους δεν μπορούν να καθορίσουν κανένα απολύτως χώρο · θα ήταν απαραίτητο να σχηματίζεται ένα *κλειστό* σχήμα με τα σύνορα/όρια του πάνω στο επίπεδο ώστε να υπάρχει αντιστοιχία

και με την άλλη υπόθεση του Αρχιμήδη σύμφωνα με την οποία ‘ ανάμεσα σε επιφάνειες που έχουν τα ίδια άκρα/πέρατα, εάν αυτές οι επιφάνειες βρίσκονται σε ένα επίπεδο, το επίπεδο είναι η πιο μικρή επιφάνεια( στο χώρο αυτό /στην περιοχή αυτή) ’ . Μια τέτοια ερμηνεία του εξ ίσου ακόμα και αν υποθέσουμε ότι σημαίνει ‘σε ίση απόσταση’ δεν θα μπορούσε να σταθεί σ’ αυτή την περίπτωση σε αυτό τον ορισμό. Η αναγκαιότητα επομένως να ερμηνεύσουμε το εξ ίσου ομοίως και στους δύο ορισμούς μάς εμποδίζει να θεωρήσουμε ότι αναφέρεται στην απόσταση ή το μήκος . Πρέπει επίσης να προσθέσουμε ότι ο Simplicious έδωσε τις ίδιες ερμηνείες με τον Πρόκλο.

## **Η γλώσσα και η σύνταξη του ορισμού**

Ας εξετάσουμε τώρα τις actual λέξεις και τη γραμματική της φράσης ‘*ήτις εξ ίσου τοις εφ’εαυτοις σημείοις κείται’*. Σχετικά με την έκφραση *εξ ίσου* σημειώνουμε ότι ο Πλάτωνας και ο Αριστοτέλης (η χρήση της έκφρασης στα κείμενά τους είναι αρκετά συχνή) της δίνουν/τη χρησιμοποιούν εννοώντας μια ‘κατάσταση ισότητας’: δες *οι εξ ίσου* στους Νόμους του Πλάτωνα 777D, 919D· Αριστοτέλης, Πολιτεία 1259 b 5 *εξ ίσου είναι βούλεται την φύσην*, ‘τείνει να βρίσκεται σε ισορροπία με τη φύση,’ Eth.Nic. VIII. 12, 1161 και 8 *ενταύθα πάντες εξ ίσου*, ‘βρίσκονται σε μια κατάσταση ισότητας’. Ελαφρώς διαφορετική είναι η χρήση στον Αριστοτέλη, Eth.Nic.x.8,1178 & 25 *των μεν γαρ αναγκαίων χρεία και εξ ίσου έστω* ‘και οι δύο χρειάζονται το ίδιο τα απαραίτητα για τη ζωή ’, κεφάλαια IX, 15, 174, 32 *εξ ίσου ποιούντα την ερώτησην* ‘κάνοντας την ερώτηση με αδιαφορία’

(χωρίς ένδειξη προτίμησης). Επομένως η κανονική σημασία πλησιάζει περισσότερο σε εκφράσεις όπως εξισορροπημένα, ίσα ως προς το μέτρο, κρατώντας ίσες αποστάσεις, χωρίς κάποια κλίση κτλ.. Η δοτική *τοις εφ᾽εαυτής* συντάσσεται με το *εξ ίσου* ή με το *κείται*; Στην πρώτη περίπτωση η φράση πρέπει να σημαίνει 'αυτή που κείται εξίσου (αναφορικά με) από τα σημεία της, ενώ στη δεύτερη περίπτωση πρέπει να μεταφράσουμε 'αυτή η οποία ,μέσα στα σημεία της , είναι κατανεμημένη εξίσου/ομοιόμορφα'. Ο Max Simon παίρνει την πρώτη σύνταξη και δίνει το εξής νόημα: die Gerade liegt in gleicher Weise wie ihre Punkte.' Αν οι τελευταίες λέξεις σημαίνουν 'με τον ίδιο τρόπο όπως τα σημεία της' δεν βλέπω ότι μας λένε κάτι αν και ο Simon προσαρτά στις λέξεις την έννοια της *απόστασης* (Abstand) όπως ο Πρόκλος. Την δεύτερη σύνταξη την αντιλαμβάνεται ως εξής:'die Gerade ist liegt fur (durch) ihre Punkte gleichmassig gegeben worden','η ευθεία γραμμή κείται συμμετρικά ανάμεσα στα σημεία της' ή εάν θεωρήσουμε το *κείται* ως παθητικό του *τίθημι* , 'die Gerade ist durch ihre Punkte gleichmassig gegeben worden,' 'η ευθεία γραμμή καθορίζεται συμμετρικά από τα σημεία της'. Προσθέτει επίσης ότι η ιδέα εδώ είναι η *κατεύθυνση* και ότι και η *κατεύθυνση* και η *απόσταση* (ανάμεσα σε δύο διαφορετικά σημεία) θα ήταν για τον Ευκλείδη, όπως και για τον Bolzano αργότερα (*Berachtungen uber einige Gegenstande der Elementargeometrie*, 1804, εισαγωγή από τον Schotten, *Inhalt und Methode des planimetrischen Unterrichts*, II. P.16)κύριες ανάγωγες έννοιες.

Ενώ η γλώσσα είναι τόσο απελπιστικά ασαφής, μπορούμε ωστόσο με σιγουριά να πούμε ότι το είδος της έννοιας που επιθυμούσε να εκφράσει ο Ευκλείδης ήταν αυτό της γραμμής η οποία φέρει το ίδιο σχήμα σε όλα τα σημεία της χωρίς κανένα ακανόνιστο ή ασύμμετρο

στοιχείο να διαφοροποιεί τα μέρη και τις πλευρές μεταξύ τους /από κάποιο κομμάτι ή πλευρά της από κάποιο άλλο. Οποιαδήποτε τέτοια ασσυμετρία ανωμαλία/αρρυθμία θα γινόταν αμέσως αντιληπτή με την ένωση των άκρων και τη στροφή της γραμμής γύρω από αυτά· αν οποιεσδήποτε δύο θέσεις προεξείχαν, πχ. βρίσκονταν δεξιά ή αριστερά η μία της άλλης, 'τότε η γραμμή δε θα κείτονταν κατά ομοιόμορφο τρόπο ανάμεσα στα σημεία της'.

**Μία εικασία για την προέλευση και τη σημασία του(ορισμού)**

Η ερώτηση που προκύπτει είναι η εξής: ποιά είναι η προέλευση του ορισμού του Ευκλείδη ή αλλιώς πώς τον εμπνεύστηκε; Μου φαίνεται πως η πραγματική του βάση βρίσκεται στον ορισμό του Πλάτωνα σύμφωνα με τον οποίο 'ευθεία γραμμή είναι η γραμμή το κέντρο της οποίας καλύπτει τα άκρα'. Ο Ευκλείδης υπήρξε οπαδός του Πλάτωνα και τι πιο φυσικό από το να υιοθετήσει τον ορισμό του Πλάτωνα κατ' ουσίαν, θεωρώντας παράλληλα απαραίτητο να αλλάξει τη φόρμα των λέξεων έτσι ώστε να τον να τον απαλλάξει από οποιαδήποτε «παραπομπή»στην όραση που ως φυσικό φαινόμενο δεν μπορούσε να σταθεί σε έναν καθαρά γεωμετρικό ορισμό; Για το λόγο αυτό πιστεύω πως ο Ευκλείδης με τον ορισμό του προσπαθεί να εκφράσει, με όρους που ένας γεωμέτρης δεν θα μπορούσε να αμφισβητήσει ως μη γεωμετρικού αντικειμένου, το ίδιο πράγμα με τον Πλάτωνα.

Η αλήθεια είναι πως ο Ευκλείδης επιχειρούσε το ακατόρθωτο. Όπως λέει ο Pfleiderer (Σχόλια στον Ευκλείδη), «Μου φαίνεται πως η έννοια της ευθείας γραμμής, χάρη στην απλότητά της, δεν μπορεί να αποδοθεί με κανέναν κανονικό /συνήθη ορισμό ο οποίος δεν θα εισάγει

λέξεις που έχουν οι ίδιες ούτως ή άλλως την ανάγκη προσδιορισμού (όπως είναι η κατεύθυνση, η ισότητα, η ομοιομορφία ή η αντιστοιχία/ομαλότητα των θέσεων, η σταθερή πορεία)· μου φαίνεται ότι είναι αδύνατο, εάν ένα άτομο δεν ξέρει ήδη τι σημαίνει ο όρος ευθεία , να του εξηγήσεις χωρίς να χρησιμοποιήσεις με κάποιον τροπο μια εικόνα ή μια ζωγραφιά. Ανάλογα έχει παρουσιασθεί η ευθεία σε βιβλία όπως το Elementi di geometria του Veronese (Μέρος I., 1904, σελ. 10): ‘Μια τεντωμένη χορδή, πχ. ένα μολύβδινο σύρμα, μια ακτίνα φωτός που εισχωρεί σε σκοτεινό δωμάτιο από μια μικρή τρύπα, όλα αυτά είναι ευθύγραμμα αντικείμενα. Το είδωλό τους μας δίνει την αφηρημένη ιδέα μιας περιορισμένης γραμμής που λέγεται ευθύγραμμο τμήμα.

## **Άλλοι ορισμοί**

Θα τελειώσουμε αυτό το σχόλιο με κάποιους άλλους διάσημους ορισμούς της ευθείας γραμμής. Οι επόμενοι ανήκουν στον Πρόκλο (σελ.110, 18-23).

1. Επ’ άκρον τεταμένη γραμμή. Ο ορισμός αυτός χρησιμοποιείται και από τον Ήρωνα με την προσθήκη των λέξεων ‘επί τα πέρατα’.
2. Μέρος της δεν μπορεί να βρίσκεται σε ένα υποτιθέμενο επίπεδο εάν μέρος της βρίσκεται σε κάποιο υψηλότερο. Αυτό αποτελεί πρόταση στον Ευκλείδη.
3. Πάντα αυτής τα μέρη πάσιν ομοίως εφαρμόζει. Ο Ήρων χρησιμοποιεί τον ορισμό αυτό επίσης, μόνο που αντικαθιστά το ‘ομοίως’ με το με το ‘παντοίως’ ,(με οποιδήποτε τρόπο) το οποίο αποτελεί καλύτερη διατύπωση καθώς καταδεικνύει ότι τα μέρη της ευθείας εφαρμόζουν καθ’ οιονδήποτε τρόπο, ακόμα και με τον αντίστροφο, χωρίς να αλλάζει το αποτέλεσμα .

4. Ευθεία γραμμή έστιν η των περάτων μενόντων και αυτή μένουσα. Η προσθήκη του Ήρωνα σε αυτό ‘οίον εν τω αυτώ επιπέδω στρεφομένη’(όταν περιστρέφεται περιστρέφεται πάντα στο ίδιο επίπεδο) και η ακόλουθη /παρακάτω παραλλαγή του ‘..τα ίδια άκρα έχουν πάντα την ίδια θέση’ δείχνουν ότι ο ορισμός της ευθείας γραμμής ως γραμμής που ‘δεν αλλάζει θέση όταν περιστραφεί γύρω από τα άκρα της ή από οποιαδήποτε δύο σημεία της’ δεν αποτελεί αυθεντική ανακάλυψη του Leibniz ή του Saccheri,του Krafft ή του Gauss, αλλά φτάνει πίσω στα πρώτα χριστιανικά χρόνια.. Η εκδοχή του Gauss για τον ορισμό είναι η εξής: η γραμμή στην οποία βρίσκονται όλα τα σημεία που, κατά τη διάρκεια της περιστροφής ενός σώματος (ενός μέρους του χώρου/διαστήματος) γύρω από δύο ορισμένα σημεία της, διατηρούν τη θέση τους αμετάβλητη ονομάζεται ευθεία γραμμή.’ Ο Schotten ( I σελ.315) διατείνεται ότι η έννοια/θεωρία της ευθείας γραμμής και η ιδιότητά της να καθορίζεται από δύο σημεία ασυναίσθητα θεωρείται δεδομένο σε αυτό τον ορισμό οπότε πρόκειται για λογικό ‘κύκλο’.
5. Η γραμμή η οποία με μια άλλη του είδους της δεν είναι δυνατό να δώσουν σχήμα, η μετά της ομοειδούς μιάς σχήμα μη αποτελούσα. Αυτό αποτελεί ένα ξεκάθαρο ύστερον-πρότερον αφού προϋποθέτει την έννοια του σχήματος.

Τέλος ο ορισμός του Leibniz πρέπει να αναφερθεί: ευθεία γραμμή είναι αυτή που χωρίζει ένα επίπεδο σε δύο μισά ίδια σε όλα εκτός από τη θέση. Πέρα από το γεγονός ότι ο ορισμός αυτός εισάγει το επίπεδο, δε φαίνεται να έχει κάποιο πλεονέκτημα σε σχέση με τον τελευταίο ορισμό.

Ο Legendre χρησιμοποιεί την ιδιότητα της ευθείας όπως την διατύπωσε ο Αρχιμήδης: η μικρότερη απόσταση ανάμεσα σε δύο σημεία.

Ο Van Swinden παρατηρεί (Elemente der Geometrie 1834, σελ.4) ότι το να εκλάβεις αυτό ως ορισμό προϋποθέτει ως δεδομένο την πρόταση ότι οι δύο πλευρές ενός τριγώνου είναι μεγαλύτερες από την τρίτη και την απόδειξη ότι οι ευθείες γραμμές που έχουν δύο κοινά σημεία συμπίπτουν σε όλο τους το μήκος/ από άκρου εις άκρον (Legendre, Elements de Geometrie I., 3,8).

Όλοι οι άνωθεν ορισμοί επιβεβαιώνουν την παρατήρηση του Unger (Die Geometrie des Euklid, 1833): Η ευθεία είναι μία απλή έννοια και ως εκ τούτου/κατά συνέπεια όλοι οι ορισμοί είναι καταδικασμένοι ν'αποτύχουν….Αν όμως η 'πραγματική διάσταση' της ευθείας γραμμής έχει συλληφθεί έστω και μία φορά θα αναγνωριστεί σε όλες τις εκδοχές των ορισμών. Για το λόγο αυτό όλοι οι ορισμοί πρέπει να θεωρηθούν *εξηγήσεις* και ανάμεσά τους καλύτερος είναι αυτός από τον οποίο μπορούμε να αντλήσουμε/καταλήξουμε σε περρισότερα συμπεράσματα σχετικά με το τι είναι ευθεία.

## Ορισμός 8

Επίπεδος δε γωνία έστιν η εν επιπεδω δύο γραμμών απτομένων αλλήλων και μη επ'ευθείας κειμένων προς αλλήλας των γραμμών κλίσις.

Επίπεδη γωνία είναι η κλίση δύο γραμμών σε ένα επίπεδο οι οποίες συναντούν η μία την άλλη χωρίς να αποτελούν/σχηματίζουν ευθεία γραμμή.

Η φράση 'μη επ'ευθείας' είναι παράξενη αν υποθέσουμε πως ο ορισμός επιδιώκει να συμπεριλάβει γωνίες που σχηματίζονται τόσο από καμπύλες όσο και από ευθείες γραμμές. Θα περιμέναμε μία διατύπωση σαν το *συνεχείς* μεταξύ τους. Ο Ήρων πιστεύει πως κάπως έτσι πρέπει να αποδοθεί το πραγματικό νόημα της έκφρασης αφού περνάει στην

άμεση εξήγηση του τι θα σήμαινε το *ου συνεχείς*. Φαίνεται σαν όντως να σκόπευε ο Ευκλείδης να ορίσει την ευθύγραμμη γωνία, αλλά με μια δεύτερη σκέψη, ως παραχώρηση προς την τότε κοινή αναγνώριση των καμπυλόγραμμων γωνιών, άλλαξε τις 'ευθείες γραμμές' σε 'γραμμές' και χώρισε τον ορισμό σε δύο.

Νομίζω πως όλα τα στοιχεία υποδεικνύουν ότι ο ορισμός της γωνίας από τον Ευκλείδη ως κλίσης αποτελεί καινοτομία /μια νέα αφετηρία. Ο όρος αυτός δε συναντάται στον Αριστοτέλη και μπορούμε να συμπεράνουμε από τα γραπτά του ότι η ιδέα που συσχετιζόταν την εποχή εκείνη με τη γωνία ήταν μάλλον η απόκλιση ή το λύγισμα/κάμψη των γραμμών: βλέπε την συχνή χρήση του κεκλάσθαι και όλων των άλλων μορφών του ρήματος κλαω, όπως επίσης και την αναφορά του στην μία κεκλιμμένη γραμμή η οποία σχηματίζει γωνία (την κεκαμμένην και έχουσαν γωνίαν, Μεταφ. 1016&13).

Ο Πρόκλος πάνω στον ορισμό αυτό έχει γράψει ένα μεγάλο και λεπτομερή σχολιασμό τον οποίο ως επί το πλείστον αντλεί από τη δουλειά του δασκάλου Συριανού (ο ημέτερος καθηγήμων). Δύο κριτικές που περιέχονται στον σχολιασμό δεν επιφέρουν καμία δυσκολία. Μια από αυτές ρωτά πώς, εάν μια γωνία είναι μια κλίση, μία κλίση μπορεί να δώσει/παράγει δύο γωνίες. Η άλλη αναφέρεται στο γεγονός ότι ο ορισμός φαίνεται να αποκλείει τη γωνία που σχηματίζεται από την κλίση μιας και μόνο καμπύλης γραμμής, όπως πχ. ο απόλυτος/πλήρης κισσοειδής (σε αυτό που αποκαλούμε 'κορυφή καμπύλης') ή η καμπύλη γνωστή ως ιπποπέδη. Αλλά καμπύλες σαν αυτές ανήκουν σε μια υψηλότερου επιπέδου γεωμετρία την οποία ο Ευκλείδης εύλογα/δικαιολογημένα δεν υπολόγισε.

**Άλλοι αρχαίοι ορισμοί: Απολλώνιος, Πλούταρχος, Κάρπος**

Στο σχολιασμό του Πρόκλου καταγράφονται και άλλοι ορισμοί εξαιρετικού ενδιαφέροντος. Ο Απολλώνιος όρισε τη γωνία ως τη σύναψη μιας επιφάνειας ή ενός στερεού κάτω από το σημείο κλίσης/κάμψης γραμμής ή επιφάνειας (*συναγωγή επιφάνειας ή στερεού προς ενί σημείω υπό κεκλασμένη γραμμή ή επιφάνεια*), όπου και πάλι η γωνία υποτίθεται ότι σχηματίζεται από την κάμψη/απόκλιση μιας γραμμής ή μιας επιφάνειας. Ίσως ακόμα περισσότερο ενδιαφέρον είναι ο ορισμός 'από αυτούς που υποστηρίζουν ότι το πρώτο διάστημα υπό το σημείον είναι η γωνία'. Ανάμεσα σ'αυτούς συγκαταλέγεται και ο Πλούταρχος ο οποίος ισχυρίζεται ότι ο Απολλώνιος εννοούσε το ίδιο πράγμα. Γιατί, υποστηρίζει, πρέπει να υπάρχει μια πρώτη απόσταση κάτω από την απόκλιση των εμπλεκομένων γραμμών ή επιφανειών, αν και, όντας συνεχής η απόσταση κάτω από το σημείο, είναι αδύνατο να επιτυγχάνει/αποτελεί την πραγματική πρώτη αφού κάθε απόσταση μπορεί να διαιρείται επ'άπειρον. Υπάρχει μία ασάφεια ως προς τη χρήση της λέξης *απόσταση* (διάστημα), έτσι εκτιμήθηκε ότι 'εάν κάπως διαχωρίσουμε την *πρώτη* (απόσταση) και φέρουμε μία ευθεία γραμμή ενδιαμέσου της θα σχηματιστεί *τρίγωνο* και όχι μία γωνία Πέραν της αντιλογίας, δεν μπορώ παρά να βρω στην ιδέα του Πλάτωνα και των άλλων σπέρματα μιας αξιόλογης σύλληψης στην απειροστή ανάλυση, μια προσπάθεια (μολονότι αποσπασματική και ατελή) να φτάσουμε στην εκτίμηση/να εκτιμήσουμε την/της *απόκλιση διανύσματος* μεταξύ γραμμών στο σημείο συνάντησης τους ως μέτρο της γωνίας μεταξύ τους.

Μια τρίτη άποψη για τη γωνία είναι αυτή του Κάρπου από την Αντιόχεια ο οποίος είπε ότι 'η γωνία ήταν ένα *ποσόν*, ήτοι ένα *διάστημα* ανάμεσα στις γραμμές ή τις επιφάνειες που την περιέχουν. Αυτό σημαίνει

ότι θα μπορούσε να είναι διάστημα (ή απόκλιση διανύσματος) κατά μία έννοια (εφ'εν διεστώς), παρόλο που η γωνία δεν είναι εξ αιτίας αυτού/βάση αυτού μια ευθεία γραμμή. Γιατί οτιδήποτε επεκτείνεται προς μία κατεύθυνση (το εφ'έν διαστατόν) δεν είναι γραμμή. Όντας η φράση αυτή 'επεκτεινόμενη προς μία κατεύθυνση' ο ορισμός της γραμμής , η ιδέα του Κάρπου δικαιολογημένα θα χαρακτηριζόταν ως το μεγαλύτερο δυνατό παράδοξο (πάντων παραδοξότατον). Η δυσκολία φαίνεται να προέκυψε από την ανάγκη χρησιμοποίησης ενός διαφορετικού τεχνικού όρου για να εκφράσει μια νέα ιδέα. Ο Κάρπος αναμφισβήτητα φαίνεται να υιοθετεί την πιο μοντέρνα άποψη για την γωνία κατά την οποία η γωνία αντιπροσωπεύει *απόκλιση διανύσματος* παρά απόσταση/διάνυσμα και να αντιλαμβάνεται το *εφ'εν* ως *κατά μια έννοια* (*περιστροφικώς*) παρά *προς μία κατευθυνση* ή *κατά μία διάσταση* (γραμμικώς).

## **Σε ποιά κατηγορία ανήκει η γωνία;**

Υπήρξε έντονη διαμάχη ανάμεσα στους φιλοσόφους για την ειδική κατηγορία (σύμφωνα με το σχεδιάγραμμα του Αριστοτέλη) στην οποία θα έπρεπε να καταταγεί η γωνία. Είναι δηλαδή ποσόν, ποιόν ή σχέση (προς τι);

1. Εκείνοι που την κατέταξαν στην κατηγορία του *ποσού* στήριξαν την άποψη τους στο γεγονός ότι μία επίπεδη γωνία τέμνεται από μία γραμμή και μία στερεή γωνία από μία επιφάνεια. Αφού τότε είναι μία επιφάνεια που τέμνεται από μία γραμμή και μία στερεά η οποία τέμνεται από μία επιφάνεια, ένιωσαν υποχρεωμένοι να συμπεράνουν ότι η γωνία είναι μία επιφάνεια ή ένα στερεό οπότε είναι και μέγεθος. Όμως τα ομογενή

πεπερασμένα μεγέθη, πχ. οι επίπεδες γωνίες πρέπει να φέρουν λόγο η μία προς την άλλη ή η μία πρέπει να είναι δυνατό να πολλαπλασιαστεί μέχρι να υπερβεί την άλλη. Ωστόσο αυτό δεν μπορεί να ισχύσει ούτε για την ευθύγραμμη γωνία ούτε για την κερατοειδή γωνία η οποία αργότερα επαναπροσδιορίστηκε ως 'γωνία' ανάμεσα σε ένα κύκλο και μία εφαπτόμενη σ' αυτόν, αφού (Ευκλ III.16) η τελευταία γωνία είναι μικρότερη από οποιαδήποτε ευθύγραμμη γωνία.. Η αντιλογία ωστόσο προϋποθέτει ότι τα δύο είδη γωνιών *είναι* ομογενή. Ο Πλούταρχος και ο Κάρπος κατατάσσονται ανάμεσα σε εκείνους οι οποίοι, με τον ένα ή τον άλλο τρόπο, τοποθέτησαν τη γωνία ανάμεσα στα μεγέθη. Και, όπως προαναφέρθηκε, ο Πλούταρχος ισχυριζόταν πως ο Απολλώνιος ήταν υποστηρικτής της άποψής του παρόλο που η λέξη *συστολή* (μιας επιφάνειας ή ενός στερεού) όπως χρησιμοποιήθηκε από τον τελευταίο δεν συνιστά μέγεθος πολύ περισσότερο απ' ότι η *κλίση/κάμψη* του Ευκλείδη. Αυτός ο τελευταίος συλλογισμός αδιαμφισβήτητα οδήγησε τον «Αγάνη», προφανώς 'φίλο' του Σιμπλίκιου, να επεξηγήσει τα λόγια του Απολλώνιου '*μία ποσότητα που έχει διαστάσεις και τα άκρα της οποίας φτάνουν σε ένα σημείο.*'

2. Ο Εύδημος ο Περιπατητικός, ο οποίος έκανε μια ολόκληρη εργασία πάνω στη γωνία, διατεινόταν ότι ανήκε στην κατηγορία της ποσότητας. Ο Αριστοτέλης είχε δώσει ως τέταρτη του εκδοχή για το ποιόν « μορφή και σχήμα υπάρχουν/υφίστανται σε κάθε πράγμα, και, εκτός αυτών, ευθύτητα, καμπυλοτήτα και τα όμοια» (κατηγορίες8,10 &11). Λέει πως αναφερόμαστε σε κάθε ανεξάρτητο πράγμα ως *ίδιον* ως προς τη μορφή του και αναφέρει ως παράδειγμα το τρίγωνο και το τετράγωνο, χρησιμοποιώντας τα και αργότερα (*ibid.*II&5) για να δείξει ότι

δεν επιδέχονται όλα τα είδη/όλες οι ιδιότητες το *περισσότερο* και το *λιγότερο*. Στα *Φυσικά* επίσης Ι. 5, 188 η γωνία, η ευθεία, ο κύκλος αποκαλούνται είδη *μορφής/σχήματος* . Ο Αριστοτέλης χωρίς αμφιβολία θα θεωρούσε ότι η *κάμψη/απόκλιση* (κεκλάσθαι) ανήκει στην ίδια κατηγορία με την ευθύτητα και την καμπυλότητα. Σε όλες τις περιπτώσεις ο Εύδημος θεώρησε ότι η γωνία προέρχεται από την κάμψη και την απόκλιση (κλάσις) γραμμών. Η κάμψη, συμπεραίνει, είναι ποιόν εάν και η ευθύτητα είναι ποιόν, και ό,τι προέρχεται από ποιόν είναι και το ίδιο ποιόν. Ωστόσο υπήρξαν ενστάσεις και σε αυτή την άποψη. Εάν η γωνία είναι ποιότης όπως η ζέστη ή το κρύο, πώς γίνεται να διχοτομείται; Η γωνία μπορεί να διαιρεθεί. Και, εάν η διαιρετότητα είναι απαραίτητη ιδιότητα των πραγμάτων που θεωρούνται *ποσόν* και όχι ποιόν, μία γωνία δεν μπορεί να θεωρηθεί ποιόν. Επιπλέον, *το περισσότερο* και *το λιγότερο* αποτελούν τις ειδικές ιδιότητες της ποιότητας, όχι το ίσο και το άνισο. Για το λόγο αυτό εάν η γωνία ήταν ποιόν, θα έπρεπε να αναφερόμαστε στη γωνία όχι ως μικρότερη ή μεγαλύτερη, αλλά ως περισσότερο ή λιγότερο γωνία και θα έπρεπε να λέμε ότι δύο γωνίες είναι *ανόμοιες* και όχι άνισες. Πράγματι ξέρουμε από τα σχόλια του Σιμπλίκιου, 538, 21 πάνω στο De Caelo του Αριστοτέλη ότι εκείνοι που κατέτασσαν τη γωνία στην κατηγορία ποιόν όντως χρησιμοποιούσαν τον όρο *όμοιες* γωνίες. Ο ίδιος ο Αριστοτέλης χρησιμοποιεί τον όρο όμοιες γωνίες με αυτή την έννοια στο *De Caelo* 296β 20, 311β 34.

3. Ο Συριανός θεωρεί ότι ο Ευκλείδης και όλοι εκείνοι που αποκαλούσαν τη γωνία κλίση την κατατάσσουν στην κατηγορία *σχέση* (*προς τι*). Ακόμη είναι σίγουρο πως ο Ευκλείδης θεωρεί τις γωνίες μεγέθη. Αυτό φαίνεται ξεκάθαρα και στην

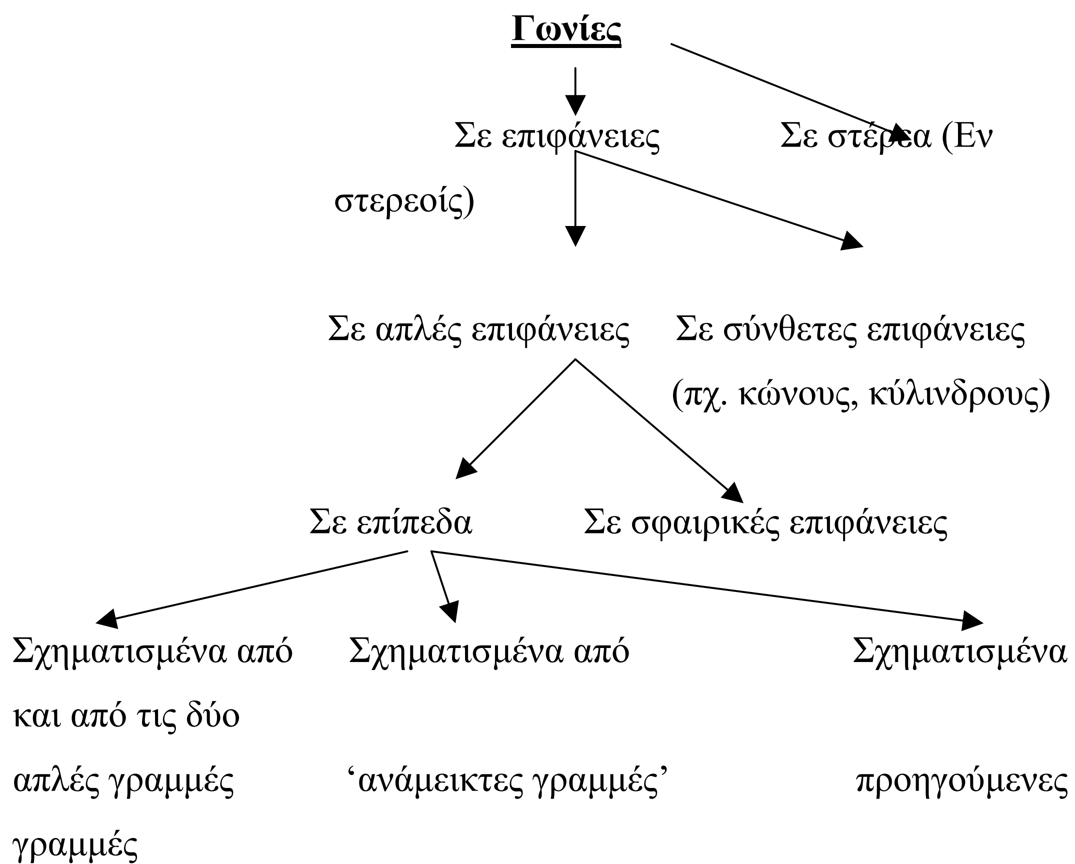
περίπτωση από τις προηγούμενες προτάσεις που αναφέρονται ειδικά στις γωνίες πχ Ι. 9, 13 και επίσης (μολονότι με διαφορετικό τρόπο) από τον τρόπο που περιγράφει τη γωνία στον επόμενο ορισμό και πάντα ως *περιεχόμενη* στις δύο γραμμές που τη σχηματίζουν. (Συμεών, Ευκλείδης, σελ.28)

Ο Πρόκλος ( σε αυτή την περίπτωση ο Συριανός) προσθέτει ότι η αλήθεια βρίσκεται κάπου ανάμεσα στις τρεις αυτές απόψεις. Η γωνία ουσιαστικά ανήκει/ συμμετέχει και στις τρεις κατηγορίες. Χρειάζεται την *ποσότητα* που βρίσκεται στα μεγέθη, επομένως επιδέχεται την ισότητα, την ανισότητα και τα όμοια. Χρειάζεται την ποιότητα που της δίνεται από το σχήμα της και τελευταία την σχέση που υπάρχει στις γραμμές ή τα επίπεδα που την οριοθετούν.

## Η αρχαία κατηγοριοποίηση των «γωνιών»

Μια λεπτομερής κατηγοριοποίηση των γωνιών σύμφωνα με τον Πρόκλο μπορεί σίγουρα να αποδοθεί στον Γέμινο (Geminus). Για να την δείξουμε σε διάγραμμα είναι απαραίτητο να δώσουμε ένα παράδειγμα ανάγνωσης των όρων. Όλες οι κατηγορίες αναφέρονται σε είδη γωνιών, το "γραμμή-περιφέρεια" αναφέρεται σε γωνία που σχηματίζεται από μία ευθεία γραμμή και ένα τόξο κύκλου, το "γραμμή-κυρτό" αναφέρεται σε γωνία που σχηματίζεται από ευθεία γραμμή και από κυκλικό τόξο με κυρτότητα προς τα έξω. Με τον ίδιο τρόπο 'διαβάζουμε' και τους υπόλοιπους όρους.

Ακολουθεί το σχεδιάγραμμα στην επόμενη σελίδα.

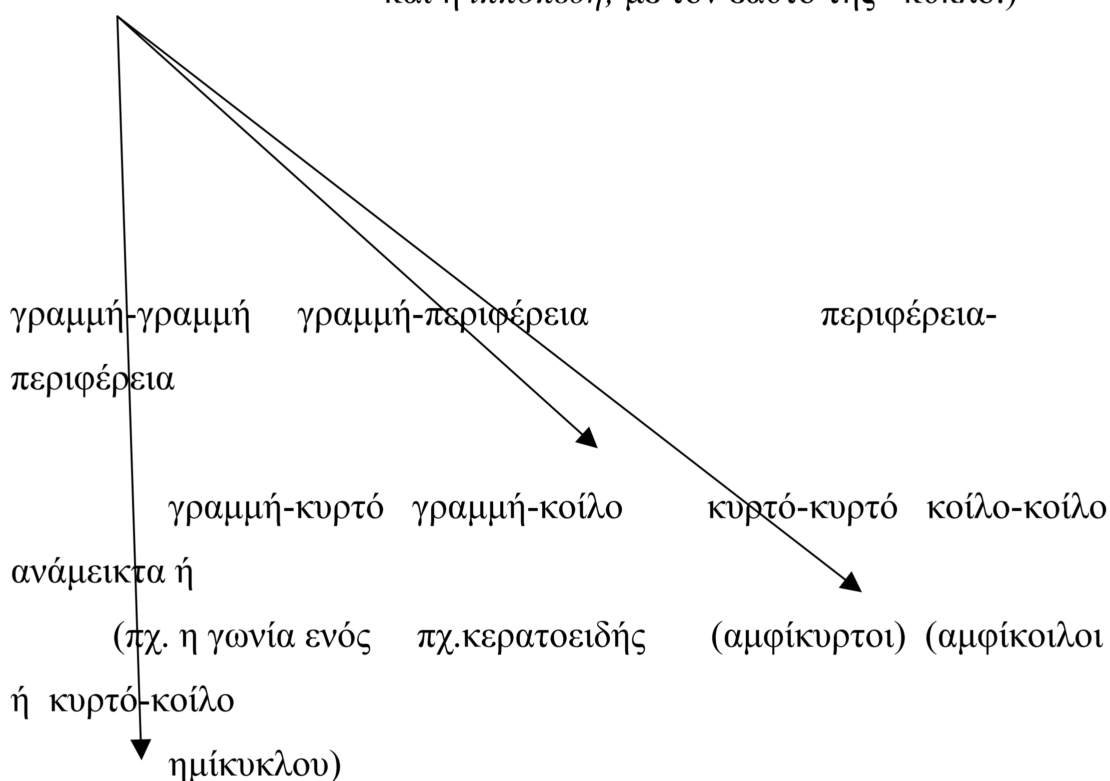

Γωνίες
Σε επιφάνειες
Σε στέρεα (Εν στερεοίς)
Σε απλές επιφάνειες
Σε σύνθετες επιφάνειες (πχ. κώνους, κύλινδρους)
Σε επίπεδα
Σε σφαιρικές επιφάνειες
Σχηματισμένα από απλές γραμμές
Σχηματισμένα από 'ανάμεικτες γραμμές'
Σχηματισμένα και από τις δύο προηγούμενες γραμμές

πχ. η γωνία που σχηματίζεται (πχ. η γωνία που σχηματίζεται

από μία καμπύλη από μία έλλειψη και τον άξονά

όπως η *κισσοειδής* της ή από μία έλλειψη και ένα

και η *ιπποπέδη,* με τον εαυτό της κύκλο.)



γραμμή-γραμμή γραμμή-περιφέρεια περιφέρεια-περιφέρεια

γραμμή-κυρτό γραμμή-κοίλο κυρτό-κυρτό κοίλο-κοίλο ανάμεικτα ή

(πχ. η γωνία ενός πχ.κερατοειδής (αμφίκυρτοι) (αμφίκοιλοι ή κυρτό-κοίλο

ημίκυκλου)

ξυστροειδείς) (αυτά σε

σχήμα μισο-

φέγγαρου).

**<u>Ορισμοί της ταξινομημένης γωνίας</u>**

Όπως για το σημείο, την ευθεία και το επίπεδο έτσι και για τη γωνία ο Schotten δίνει μία αξιόλογη περίληψη, ταξινόμηση και κριτική των διαφορετικών μοντέρνων απόψεων μέχρι τούδε (*Inhalt und Method des planimetrischen Untrerrichts*, II., 1893, σελ. 94-183). Όσο για τις επόμενες εξελίξεις που παρουσιάζονται από τον Veronese γίνεται αναφορά στο τρίτο κεφάλαιο (από τον Amaldi) του Questioni riguardanti le matematiche elementari, I. (Bologna, 1912).

Με μία ή δύο εξαιρέσει, αναφέρει ο Schotten, οι ορισμοί της γωνίας μπορούν να χωριστούν σε τρεις ομάδες που γενοκότερα αντιπροσωπεύουν τα εξής:

1. Η γωνία είναι η διαφορά κατεύθυνσης μεταξύ δύο ευθείων γραμμών. (Με αυτή την ομάδα μπορεί να συγκριθεί ο ορισμός του Ευκλείδη σύμφωνα με τον οποίο η γωνία είναι μία απόκλιση)
2. Η γωνία είναι η ποσότητα ή το ποσόν (ή το μέτρο) μιας περιστροφής που γίνεται φέρνοντας/ για να φέρει μία από τις πλευρές της, από τη θέση της σε αυτήν της άλλης πλευράς, χωρίς να ξεφεύγει από το επίπεδο που περιέχει και τις δύο.
3. Η γωνία είναι το μέρος ενός επιπέδου που περιέχεται ανάμεσα σε δύο ευθείες γραμμές μέσα στο επίπεδο οι οποίες συναντιούνται σε ένα σημείο (ή δύο ακτίνων που ξεκινούν από το ίδιο σημείο).

**Είναι άξιο προσοχής ωστόσο ότι σχεδόν όλα τα εγχειρίδια, που δίνουν ορισμούς διαφορετικούς από αυτούς των ομάδων, προσθέτουν σε αυτούς κάτι επισημαίνοντας τη σχέση μεταξύ γωνίας και περιστροφής: μία εντυπωσιακή υπόδειξη ότι η ουσιαστική/κύρια φύση της γωνίας είναι στενά συνδεδεμένη με την περιστροφή και ότι ένας καλός ορισμός πρέπει να υπολογίζει αυτή τη σύνδεση.**

Οι ορισμοί της πρώτης ομάδας είναι ομολογουμένως ταυτολογικοί ή, *κυκλοτερείς*, λαμβανομένου υπ'όψιν ότι προϋποθέτουν κάποια ιδέα για τη γωνία. Η κατεύθυνση (ως ανάμεσα σε δύο δεδομένα σημεία) μπορεί χωρίς αμφιβολία να θεωρηθεί πρωταρχική ιδέα και μπορεί να οριστεί ως "η άμεση σχέση δύο σημείων τα οποία μας επιτρέπει να συνειδητοποιήσουμε η ακτίνα"(Schotten). Όμως "μία κατεύθυνση δεν είναι κανένα τεράστιο μέγεθος οπότε δύο κατευθύνσεις δεν μπορούν να έχουν καμία ποσοτική διαφορά" (Burklen). Ούτε η κατεύθυνση επιδέχεται διαφορές σαν αυτές των ποιοτήτων, πχ. χρώματα. Η κατεύθυνση είναι μία μοναδική ενότις: δεν μπορεί να υπάρξουν διαφορετικά *είδη* ή *βαθμοί* κατεύθυνσης. Εάν αναφερόμαστε σε μία 'διαφορετική κατεύθυνση' χρησιμοποιούμε τη λέξη διφορούμενα, αυτό που εννοούμε είναι απλώς μια 'άλλη' κατεύθυνση. Γεγονός είναι ότι οι ορισμοί που ορίζουν τη γωνία ως διαφορά κατεύθυνσης υποσυνείδητα επικαλούνται κάτι έξω από την έννοια της κατεύθυνσης συνολικά, κάποια έννοια ανάλογη με αυτή της ίδιας της γωνίας.

## Ορισμός 13

Όρος εστίν, ο τινός έστι πέρας.

Όριο είναι αυτό το οποίο αποτελεί άκρο κάποιου πράγματος.

Ο Αριστοτέλης επίσης χρησιμοποιεί τις λέξεις *όρος* και *πέρας* ως συνώνυμες. De gen. Animal.II. 6, 745, & 6, 9 όπου στην έκφραση 'όριο/σύνορο του μεγέθους' χρησιμοποιούνται και οι δύο λέξεις.

Ο Πρόκλος (σελ. 136, 9) σημειώνει ότι η λέξη όριο φτάνει στις ρίζες της γεωμετρίας, η οποία προέκυψε από με τη μέτρηση περιοχών του εδάφους και την οριοθέτησή τους.

## **Ορισμός 14**

Σχήμα εστί το υπό τινός ή τινών όρων περιεχόμενον.

Σχήμα είναι αυτό το οποίο περιέχεται σε οποιοδήποτε όριο ή όρια/σύνορα.

Ο Πλάτωνας στο Μενωνα παρατηρεί ότι η στρογγυλότις ή το στρογγυλό αποτελεί 'σχήμα', όπως επίσης η ευθεία και πολλά άλλα πράγματα. Έπειτα εξετάζει τι κοινό έχουν όλα αυτά και χάρις στην παρατήρησή του αναφερόμαστε σε αυτά με τον όρο 'σχήμα'. Η απάντησή του είναι η εξής (76Α): «αναφερόμενος/παραπέμποντας σε όλα τα σχήματα λέω ότι σχήμα είναι αυτό μέσα στο οποίο έχει τα άκρα του ένα στερεό (τούτο, εις ο το στερεόν περαίνει) ή εν συντομία *σχήμα είναι ένα άκρο ενός στερεού*. Η πρώτη παρατήρηση είναι όμοια με αυτή του Αριστοτέλη στα *Φυσικά* Ι. 5, 188, &25, όπου η γωνία, η ευθεία και ο κύκλος αναφέρονται ως είδη σχήματος. Στις *Κατηγορίες* 8, 10 & 11, το ΄σχήμα' συγκαταλέγεται με την ευθύτητα και την καμπυλότητα στην κατηγορία της ποιότητας. Ωστόσο εδώ το ΄σχήμα' φαίνεται να σημαίνει μάλλον *μορφή* παρά σχήμα με την έννοια που του δίνουμε σήμερα. Πλησιάζοντας τη σημερινή έννοια του σχήματος, ο Αριστοτέλης δέχεται ότι το σχήμα είναι ένα 'είδος μεγέθους'(De Anima III. I, 425 & 18), και διαχωρίζει τα *επίπεδα σχήματα* σε δύο είδη, χρησιμοποιώντας γλώσσα όχι πολύ διαφορετική/όμοια απ'του Ευκλείδη, σε αυτά που περιέχονται σε

ευθείες και κυκλικές γραμμές: 'κάθε επίπεδο σχήμα είναι είτε ευθύγραμμο ή σχηματισμένο από κυκλικές γραμμές (περιφερόγραμμον), το ευθύγραμμο σχήμα περιέχεται σε πολλές γραμμές, το κυκλικό σε μία.'(De caelo II. 4, 286b 13). Επισημαίνει ότι το επίπεδο δεν είναι σχήμα ούτε το σχήμα επίπεδο, όμως ένα επίπεδο σχήμα αποτελεί μία έννοια και είναι είδος της κατηγορίας σχήμα/ανήκει στο είδος του σχήματος (Anal. Post. Ii. 3, 90 b 37). Ο Αριστοτέλης δεν επιχειρεί γενικά να ορίσει το σχήμα, μάλιστα υποστηρίζει ότι θα ήταν άσκοπο/ανώφελο: 'Από αυτό είναι ξεκάθαρο ότι υπάρχει ένας ορισμός για την ψυχή με τον ίδιο τρόπο που υπάρχει ένας ορισμός για το σχήμα. Γιατί στη μία περίπτωση δεν υπάρχει κανένα σχήμα εκτός από το τρίγωνο, το τετράπλευρο, και ούτω καθεξής, ούτε υπάρχει ψυχή άλλη πέραν αυτών που προαναφέρθησαν. Θα μπορούσε να δημιουργηθεί ένας ορισμός ο οποίος θα έπρεπε να αφορά σε όλα τα σχήματα αλλά όχι ειδικά σε κάποιο συγκεκριμένο σχήμα, και ομοίως με τα είδη της ψυχής που αναφέρονται.[Αλλά ένας τόσο γενικός ορισμός δεν θα εξυπηρετούσε κανένα σκοπό.] Ως εκ τούτου είναι παράλογο εδώ όπως και αλλού να αναζητούμε έναν γενικό ορισμό ο οποίος δεν θα αποτελεί κανονικά έναν ορισμό κάποιου υπαρκτού πράγματος και δε θα μπορεί να εφαρμοστεί σε ένα συγκεκριμένο ανάγωγο (που δεν επιδέχεται απλοποιήση) είδος μπροστά μας, στην εγκατάλειψη του ορισμού πράγμα που εφαρμόζεται εύκολα/πολύ εφαρμόσιμο.'

Συγκρίνοντας τον ορισμό του Ευκλείδη με τα παραπάνω, παρατηρούμε ότι με την εισαγωγή του ορίου (όρος) αυτός αυτόματα εξαιρεί την ευθεία την οποία ο Αριστοτέλης χαρακτήρισε ως σχήμα. Επίσης χωρίς αμφιβολία μπορούμε να πούμε ότι εξαίρεσε και τη γωνία κρίνοντας (1)από τη δήλωση του Ήρωνα ότι 'ούτε μία ούτε δύο γραμμές μπορούν να ολοκληρώσουν ένα σχήμα' (2) από τον εναλλακτικό ορισμό της ευθείας γραμμής ως 'αυτή η οποία δεν μπορεί με αλλή γραμμή του

ίδιου είδους να δώσει σχήμα' (3) από τον διαχωρισμό που έκανε ο Geminus ανάμεσα στη γραμμή που *δίνει σχήμα* (*σχηματοποιούσα*) και τη γραμμή που *προεκτείνεται επ'άπειρον* (*επ'άπειρον εκβαλλόμενη*), του οποίου μεταγενέστερος όρος περιλαμβάνει μία υπερβολή και μία παραβολή. Αντί να ονομάσει σχήμα ένα *άκρο,* όπως έκανε ο Πλάτωνας με την έκφραση 'άκρο ενός στερεού', ο Ευκλείδης περιγράφει ως σχήμα *αυτό το οποίο έχει ένα όριο ή όρια*. Και τελευταία, παρά την ένσταση του Αριστοτέλη, όντως επιχειρεί έναν γενικό ορισμό που να καλύπτει όλα τα είδη του σχήματος, στέρεα και επίπεδα. Για το λόγο αυτό φαίνεται ξεκάθαρα πως ο ορισμός του Ευκλείδη ανήκει αποκλειστικά σε αυτόν.

Μία άλλη άποψη για το σχήμα, που θυμίζει αυτή του Πλάτωνα στο Meno 76A, αποδίδεται από τον Πρόκλο στον Ποσειδώνιο. Ο τελευταίος θεωρούσε το σχήμα *πέρας συγκλείον*, "διαχωρίζοντας την έννοια του σχήματος από αυτή της ποσότητας (ή του μεγέθους) και αποδίδοντας της την αιτία του *ωρίσθαι*, του *πεπεράσθαι* και της *περιοχής*. … Έτσι φαίνεται ο Ποσειδώνιος να έχει υπ'όψιν του το όριο μόνο τοποθετημένο γύρω από έξω, ενώ ο Ευκλείδης εννοεί όλο το περιεχόμενο, έτσι ώστε ο Ευκλείδης να μιλά για κύκλο ως σχήμα αναφορικά με ολόκληρο το επίπεδο του (επιφάνεια) και την περιοχή εκτός, ενώ ο Ποσειδώνιος (να μιλά για κύκλο ως σχήμα) αναφορικά με την περιφέρειά του….ο Ποσειδώνιος ήθελε να εξηγήσει την έννοια του σχήματος ως ένα *πεπερασμένο* και *συγκλείον* μέγεθος.

Ο Πρόκλος παρατηρεί ότι μια λογική και εκλεπτυσμένη κριτική ίσως να επέκρινε τον ορισμό του Ευκλείδη γιατί καθορίζει το είδος από τα επιμέρους είδη, αφού αυτό που περικλείεται από ένα όριο και αυτό που περικλείεται από πολλά είναι εξίσου είδη σχημάτων. Η καλύτερη απάντηση βρίσκεται στην παράγραφο του Αριστοτέλη (De Anima) που παρατίθεται άνωθεν.

**<u>Ορισμοί 15, 16</u>**

15. Κύκλος εστί σχήμα επίπεδον υπό μιας γραμμής περιεχόμενον [η καλείται περιφέρεια], προς ην αφ’ενός σημείου των εντός του σχήματος κειμένων πάσαι αι προσπίπτουσαι ευθείαι [προς την του κύκλου περιφέρεια] ίσαι αλλήλαις εισίν.

16. Κέντρον δε του κύκλου το σημείον καλείται.

15. Κύκλος είναι ένα επίπεδο σχήμα που περιέχεται σε μια γραμμή τέτοια που όλες οι ευθείες γραμμές που προσπίπτουν πάνω της ξεκινώντας από ένα από τα σημεία που βρίσκονται εντός του κύκλου, είναι ίσες μεταξύ τους.

16. Και το σημείο αυτό καλείται κέντρο του κύκλου.

# Οι απόψεις του Πρόκλου επί των ορισμών του Ευκλείδη

Εκτός από τις επισυνάψεις των σχολίων του Πρόκλου στο προηγούμενο μέρος των σχολίων του Heath, ενδιαφέρον έχουν κι άλλες απόψεις του Πρόκλου. Συγκεκριμένα:

## Πάνω στον ορισμό 1

Φρονεί , ότι είναι σε όλους προφανές, ότι ο Ευκλείδης, κατά τους ορισμούς του, προχώρησε επαγωγικά, από το συνθετότερο στο απλούστερο, και συγκεκριμένα , από το τριδιάστατο σχήμα στην επιφάνεια η οποία είναι το πέρας του, μετά από την επιφάνεια , στο πέρας της οποίας είναι η γραμμή, και από την γραμμή στο σημείο το οποίο είναι ανεξάρτητο από κάθε διάσταση. Στην συνέχεια αφού κάνει ορισμένα μεταφυσικής φύσεως σχόλια πάνω στην έννοια των περάτων, αποφαίνεται, ότι η μονάδα μεταξύ των αύλων μορφών, είναι η πλέον τέλεια από την πολλαπλότητα, το αδιαίρετο με ό,τι προηγείται –με οποιοδήποτε τρόπο- από αυτό και ό,τι φράσσει , είναι πιο τέλειο από αυτό που παίρνει το πέρας του., από κάτι άλλο εκτός από τον εαυτό του. Βεβαίως , αυτό μοιάζει αρκετά δυσνόητο, αλλά στην ουσία ο Πρόκλος αναφέρεται στο ότι τα «δομικά στοιχεία» των μαθηματικών οντοτήτων είναι πιο τέλεια από τα «παράγωγά τους»

Πάρα κάτω γίνεται πιο σαφής, λέγοντας ότι «αυτά τα απλά υπάρχουν για τα σύνθετα» λέει ακόμα, ότι «οι έννοιες των υπάρχουν περάτων , υπάρχουν κι υφίστανται στους ίδιους τους εαυτούς τους και όχι στα ίδια τα περατούμενα» Κι αυτό αποτελεί μια δυσνόητη απόφανση του Πρόκλου, αλλά –σύμφωνα και με σχολιαστές του έργου του (Morrow) αυτό πρέπει να το ερμηνεύσουμε με το ότι λ.χ. το σημείο , όταν ενσωματώνεται στις γραμμές που περιορίζει, χάνει τον αδιαίρετο χαρακτήρα του και συμμετέχει στην διαιρετότητα των περιορισμένων σωμάτων.

Ενδιαφέρον έχει και η άποψή του για το ότι το σημείο παρ΄ ότι δεν έχει μέρη, και όσο κι αν η ύπαρξή του καθορίζεται από το πέρας, εν τούτοις , περιέχει κάτι από την δυναμική του απείρου. Διότι γεννά όλα τα διαστήματα και η πρόοδος όλων των διαστημάτων , δεν εξαντλεί την δυναμική του. Μετέχοντας στην φύση του απείρου το σημείο , είναι παρόν στα σώματα (σημειοσύνολα) άπειρες φορές.

Αναφέρει ακόμα, ότι τα σώματα, ως διαφορετικά έχουν διαφορετικά πέρατα. Ωστόσο, το σημείο, είναι πέρας πάντων .

Στην συνέχεια κάνει μια αναδρομή στους πόλους του κόσμου σε σχέση με τις απόψεις του Πλάτωνα .

Παραδέχεται ότι η έννοια του σημείου μπορεί να είναι ατελής σύμφωνα με κάποια άποψη, αλλά για την παρούσα επιστήμη (Γεωμετρία) τέλειος. Λέει, ότι και ο Γιατρός και ο φυσικός ξεκινούν με κάποιες αρχές. Ο Γιατρός λέει ότι στοιχεία των σωμάτων είναι το πύρ και το ύδωρ, και συνεχίζει ο φυσικός, από εκεί που σταμάτησε ο γιατρός αναλύοντας σε απλούστερα, και όλοι έχουν δίκιο σε σχέση με την επιστήμη τους. Έτσι λοιπόν και για την γεωμετρία , δεν θα πρέπει να πούμε ότι έχει ατέλεια ο ορισμός του σημείου, διότι λέει σαφώς ότι αυτό που είναι χωρίς μέρη, είναι το σημείο και τίποτε άλλο εκτός αυτού. Και βέβαια, με αυτόν τον τρόπο θα πρέπει να εννοήσουμε τον ορισμό του Ευκλείδη.

Στην συνέχεια κάνει μια ενδιαφέρουσα αναφορά σε σχέση με τον Παρμενίδη , αποδίδοντας σε αυτόν την ρήση , ότι οι αρνητικοί ορισμοί, είναι οι πλέον κατάλληλοι για τις πρώτες αρχές. (έχει σχολιασθεί κι απ΄ τον Heath) .

Αναφερόμενος στους Πυθαγορείους για το ότι σημείο είναι «μονάς προσλαβούσα θέση» στην προσπάθειά του να εκθέσει το τι εννοούσαν αυτοί λέει , ότι οι αριθμοί είναι καθαρότεροι και πιο άϋλοι από τα μεγέθη και ότι η αρχή τους (η μονάδα) είναι απλούστερη απ΄ αυτούς. Αλλά όταν λένε ότι η μονάδα έχει θέση[27], νομίζω ότι δηλώνουν ότι η μονάδα έχει την ύπαρξή της και την θέση της στην σκέψη.

Και καταλήγει:

Είναι λοιπόν η μονάδα χωρίς θέση, διότι είναι άϋλη και έξω από κάθε διάστημα και τόπο.

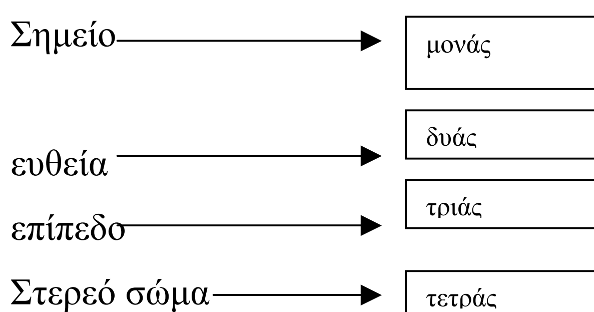
## <u>Ορισμός 2</u>

Διευκρινίζει , ότι όταν ο Ευκλείδης λέει ότι η γραμμή είναι «μήκος χωρίς πλάτος,»εννοείται και το «χωρίς βάθος»

---

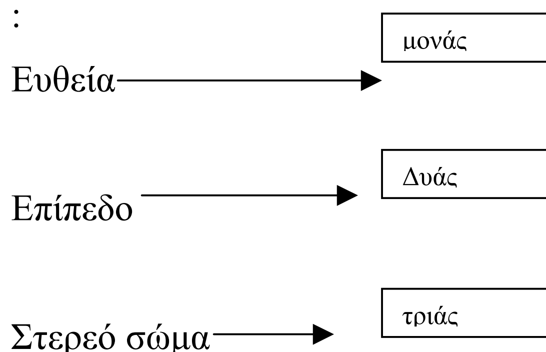
[27] Ο Morrow λέει «την αντίθετη πρόταση «θέσιν μη έχουσα» σε αντίθεση με τον Friedlein με το επιχείρημα ότι μόνο έτσι έχει νόημα η αντιθετική πρόταση που εμφανίζεται εδώ «η μεν μονάς» και «το δε σημείο» πρέπει όμως να δεχθούμε-κατά την γνώμη του γράφοντος- ότι εννοιολογικά στέκει το «θέσιν έχουσα»

Διαπραγματεύεται κατόπιν την έννοια της ρύσεως σημείου (ξεχωριστή εργασία γι αυτό)
Στην συνέχεια κάνει μια ενδιαφέρουσα σύγκριση των αρχών σε σχέση με τους Πυθαγορείους, αλλά και τον Αριστοτέλη που θεωρούν τα γεωμετρικά αντικείμενα είτε από άποψη διαστάσεων είτε από άποψη τάξεως αρχών.
Σχηματικά, ασχολείται με τα παρακάτω:




Πράγματι , τα παραπάνω σχετίζονται και με την Τετρακτύν Των Πυθαγορείων (1+2+3+4=10)

Το άλλο σχήμα έχει να κάνει με τις διαστάσεις των σωμάτων και είναι :




Λέει χαρακτηριστικά, ότι η επιφάνεια έχει τάξη τρία σε σχέση με το σημείο και την γραμμή, αλλά δύο σε σχέση με το στερεό. Έτσι και το

σώμα σε σχέση με το σημείο είναι τετραδικό, σε σχέση με την γραμμή τριαδικό. Έτσι , σύμφωνα με τους Πυθαγόρειους, το σημείο έχει διττή φύση, εφ΄ όσον υπάρχει είτε μόνο του , είτε σε γραμμή. Και ως πέρας μόνο, και ένα, μη έχοντας ούτε ολότητα, ούτε μέρη, μιμείται την κορυφή των όντων και έτσι ταξινομείται ως ανάλογο της μονάδας.
Η γραμμή είναι το πρώτο πράγμα που έχει μέρη και που είναι μια ολότητα. Είναι δε και μοναδική και ως μονοδιάστατη, αλλά και δυαδική λόγω της προόδου της. Ως άπειρη συμμετέχει στην αόριστη δυάδα και αν είναι πεπερασμένη (ευθ. τμήμα) απαιτεί δύο πέρατα, από πού και προς τα πού.[28]
Αφού κάνει και μια μεταφυσική θεώρηση, καταλήγει στο ότι μπορούμε να έχουμε μια οπτική αντίληψη της γραμμής , αν παρατηρήσουμε τον χωρισμό σκιάς και φωτός , είτε στην Γη είτε στην σελήνη. Το ενδιάμεσο φωτός –σκιάς είναι αδιάστατο κατά πλάτος.[29]

## **<u>Ορισμός 3</u>**

Σχολιάζει ο Πρόκλος, πως κάθε σύνθετο παίρνει το πέρας από το απλό και κάθε διαιρετό από το αδιαίρετο.
Ο Ευκλείδης όταν λέει ότι η γραμμή περατούται από σημεία, μας φανερώνει , ότι αυτή καθ΄ εαυτή η γραμμή είναι απεριόριστη , σαν να μην έχει πέρας, εξ αιτίας της προεκτάσεως.

[28] Εδώ υπάρχει μια διχογνωμία σε σχέση με το αρχαίο κείμενο. Ο Friedlein λέει «προς τον επ΄αυτής» και άλλοι «πρώτον επ΄αυτής» Εδώ υιοθετήθηκε η πρώτη άποψη.
[29] Με σύγχρονη θεώρηση ο Πρόκλος βρήκε ένα καλό ανάλογο και τίποτα περισσότερο, αφού υπάρχει παρασκιά , σκιά , τα σώματα που ορίζουν την σκιά είναι φυσικά και άρα ατελή κτλ.

Λέει ακόμα ότι η γραμμή είναι και άπειρη και πεπερασμένη υπό την εξής έννοια: κατά όσον αφορά την δυνατότητα προέκτασής της , άπειρη, κατά δε την συμμετοχή της στην αιτία της που είναι όμοια με πέρας (εννοεί το σημείο) είναι πεπερασμένη.
Στην συνέχεια διαπραγματεύεται την υπόσταση της γραμμής ως ευθ. τμήματος, ημιευθείας και ευθείας ., λέγοντας χαρακτηριστικά, ότι σύμφωνα με τον Ευκλείδη, η γραμμή έχει τρεις έννοιες.
(Οι υπόλοιπη θεώρηση υπάρχει σχολιασμένη στο τμήμα της εργασίας πάνω στον Heath)

## **Ορισμός 4**

Ευθεία γραμμή είναι αυτή που κείται εξ ίσου προς τα σημεία της.
Αναφέρει την άποψη του Πλάτωνα που λέει ότι τα δύο πρωταρχικά είδη γραμμών είναι η ευθεία και η περιφέρεια του κύκλου και ότι τα άλλα είδη των γραμμών προέρχονται από ανάμειξη αυτών των δύο. Τόσο αυτών που ονομάζονται ελικοειδείς και βρίσκονται σε επίπεδα, τόσο κι αυτών που ορίζονται γύρω από στερεά , είτε κι αποτομές στερεών.
Σύμφωνα με τον Πλάτωνα, το σημείο μοιάζει να έχει την υπόσταση της μονάδας. . διότι και η μονάδα δεν έχει μέρη, (όπως μας λέει στον Παρμενίδη) . Υπάρχουν τρεις υποστάσεις : Το πέρας, το άπειρο και το μεικτό. Μέσω αυτών δημιουργούνται τα είδη των γραμμών και τα είδη των γωνιών , αλλά και τα είδη των σχημάτων. Και αντίστοιχα με το πέρας είναι : Στα μεν επίπεδα η περιφέρεια του κύκλου, η γωνία που ορίζεται από καμπύλες, και ο κύκλος. Στα δε στερεά η σφαίρα. Στο άπειρο ανταποκρίνεται η ευθεία και στις τρεις ομάδες , επειδή βρέθηκε σε όλα αυτά . υπάρχουν επίσης μεικτές γραμμές, όπως οι

έλικες και μεικτές γωνίες, όπως του ημικυκλίου, και η κερατοειδής και μεικτά σχήματα , όπως τα τμήματα και οι αψίδες .

Αναφέρει ακόμα ο Πρόκλος , ότι και η άποψη του Αριστοτέλη είναι ίδια με του Πλάτωνα , διότι λέει ότι κάθε είδος γραμμής είναι ή ευθεία ή περιφερής ή μεικτή από αυτά. Και για τον λόγο αυτό μάλιστα υπάρχουν και τρία είδη κινήσεων. Κίνηση σε ευθεία , κίνηση κυκλική και κίνηση μεικτή.

Στην συνέχεια αναφέρεται στην κυλινδρική έλικα Κι στο πως αυτή παράγεται από την κίνηση την μεικτή που κάνει σημείο κινούμενο ευθύγραμμα κατά μήκος της κυλινδρικής επιφάνειας , ενώ ο κύλινδρος στρέφεται με ομαλή ταχύτητα. Μας δίνει και την πληροφορία , ότι ο Απολλώνιος είναι αυτός που χαρακτηρίζει την καμπύλη αυτή ομοιομερή , αφού όπως αποδεικνύει σε (χαμένο) έργο του είναι αυτή η καμπύλη ή μόνη που έχει αυτό το χαρακτηριστικό (μη επίπεδη)

Στην συνέχεια είναι αρκετά ενδιαφέρον που ο Πρόκλος, παρουσιάζει τον τρόπο γένεσης κάποιων γραμμών με σκοπό να τις κατατάξει, παρουσιάζοντας ουσιαστικά σύνθεση κινήσεων:

Λέει:

Φαντασθείτε ένα τετράγωνο και δύο κινήσεις, μία κατά μήκος και μία κατά πλάτος. Τότε θα προκύψει μια διαγώνια κίνηση, πάλι σε ευθεία.

Στην συνέχεια περιγράφει έναν αρκετά γνωστό και απλό γεωμετρικό τόπο . ευθύγραμμο τμήμα , σταθερού μήκους ολισθαίνει ανάμεσα στις πλευρές ορθής γωνίας. Ποίος ο τόπος του κέντρου της;

Αν κάποιος χρησιμοποιήσει την πρόταση ότι η διάμεσος επί την υποτείνουσα ορθογωνίου τριγώνου είναι το μισό αυτής, τότε εύκολα δείχνουμε , ότι το μέσον διαγράφει κύκλο. Αυτό το παράδειγμα το χρησιμοποιεί ο Πρόκλος για να δείξει ότι ο κύκλος μπορεί να παραχθεί με αυτόν τον τρόπο (κίνηση ευθείας στα όρια της ορθής

γωνίας) και δεν θα πρέπει να κατατάξουμε τον κύκλο στις μεικτές γραμμές.

Ενδιαφέρον έχει και η αναφορά του Πρόκλου στον Πλάτωνα και στον ορισμό της ευθείς που δίνει:

Είναι αυτή, της οποίας το μέσον καλύπτει τα άκρα.[30] Εξηγεί μάλιστα τον πρωτότυπο αυτό ορισμό, λέγοντας, ότι αυτό είναι μια αναγκαία συνθήκη για τρία σημεία που βρίσκονται σε ευθεία .[31] Δεν είναι όμως αναγκαία για κάποια άλλη γραμμή (λ.χ. κύκλο) ή άλλη διάσταση. Για να γίνει σαφέστατος προσθέτει, ότι ο ήλιος βρίσκεται σε έκλειψη, όταν ο ήλιος βρίσκεται στην ίδια ευθεία με την Σελήνη και τον οφθαλμό μας.

Ενδιαφέρον παρουσιάζει και η αναφορά του Πρόκλου στον Αρχιμήδη που όρισε την ευθεία ως την μικρότερη γραμμή που έχει με αυτή τα ίδια άκρα.

Στην συνέχεια αναφέρεται στις ταξινομήσεις κατά Γέμινο , στις οποίες έχουμε ήδη αναφερθεί.

## **Ορισμός 8**

Επίπεδη γωνία είναι η κλίση δύο γραμμών μεταξύ τους στο επίπεδο , που τέμνονται και δεν βρίσκονται στην ίδια ευθεία

---

[30] Πλάτωνας «Παρμενίδης» (137[ε]) «Και μην ευθύ γε, ού αν το μέσον αμφοίν τοιν εσχάτοιν επίπροσθεν ή»

[31] Πρόκειται και για πρακτικό έλεγχο μιας γραμμής αν είναι ή όχι ευθεία : αν κοιτάξουμε πλάγια στο χαρτί και το ένα άκρο τείνει να εξαφανισθεί από το άλλο, η γραμμή είναι ευθεία. Αν μπορούσαμε να βάλουμε το μάτι μας ακριβώς στο ένα άκρο (σε ένα σύρμα λ.χ.) με αυτό το κριτήριο μπορούμε να αποφανθούμε αν είναι ή όχι ευθύ , χωρίς κανόνα.

Ο Πρόκλος αναφέρεται στον χαρακτηρισμό των γωνιών ως ποιότητα ή ως ποσότητα. Επιχειρηματολογεί με το ότι αν ήταν μέγεθος, τότε αυτές θα είχαν λόγο . Και τότε θα φθάναμε στο σημείο μια κερατοειδής γωνία , να υπερέχει μιας ευθύγραμμης, πράγμα που δεν είναι δυνατόν να συμβαίνει, διότι η κερατοειδής γωνία είναι η μικρότερη από όλες.

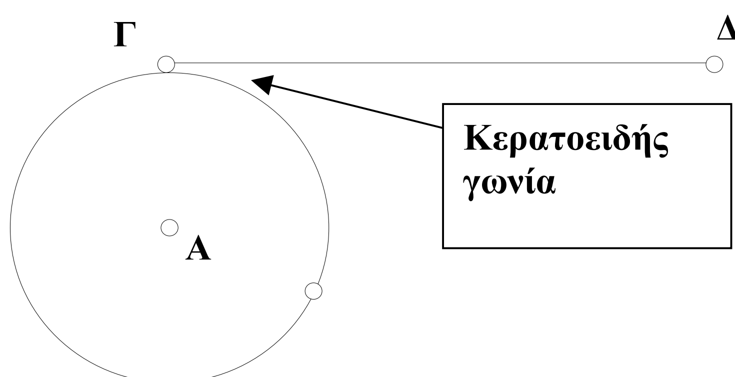
Επίσης αν η γωνία εκφράζει ποιότητα, όπως η ζέστη και το κρύο, τότε πως είναι δυνατόν να διαιρούνται σε δύο ίσα μέρη;
Στην συνέχεια αφού διαπραγματευθεί προβληματισμούς που απορρέουν από το γεγονός ότι υπάρχουν πολλά είδη γωνιών και άρα δεν είναι συγκρίσιμες, καταλήγει;
Είναι απαραίτητο να ονομάσουμε την γωνία ή ποιότητα ή ποσότητα ή σχέση. . Τα μεν σχήματα είναι ποιότητες, οι λόγοι μεταξύ τους είναι σχέσεις . άρα απομένει η ταξινόμηση σε αυτά τα τρία γένη.
Ο Ευκλείδης λέει ότι η γωνία είναι κλίση.[32] Ενώ ο Απολλώνιος την ονομάζει σύγκλιση μιας επιφάνειας ή ενός στερεού προς ένα σημείο. Αναφέρει την άποψη του Απολλώνιου, ο οποίος έλεγε ότι μάλλον δεν είναι τομή επιφάνειας ή στερεού, αλλά μάλλον επιφάνεια που συστέλλεται στο δοσμένο σημείο της .[33]
Ο Εύδημος ο περιπατητικός έλεγε , ότι η γωνία είναι ποιότητα. Εξετάζοντας τον τρόπο με τον οποίο παράγεται η γωνία λέει ότι δεν είναι τίποτα άλλο παρά διαίρεση γραμμών. . αν μάλιστα η ευθύτητα συνιστά ποιότητα, το ίδιο θα είναι και η διαίρεση. Αλλά, αφού η γωνία έχει την προέλευσή της στην ποιότητα, τότε είναι ποιότητα.
Ο Πλούταρχος ο Αθηναίος[34] έλεγε ότι η γωνία είναι ποιότητα. Έλεγε ότι «η γωνία είναι το πρώτο διάστημα κάτω από το σημείο.» έλεγε

[32] Σύμφωνα με τον Heath αυτό συνιστά πρωτοπορία του Ευκλείδη.

μάλιστα πως το ίδιο υπεστήριζε και ο Απολλώνιος και βάσιζε τον ισχυρισμό του , στο ότι πρέπει να υπάρχει κάποιο πρώτο διάστημα κάτω από την κλάση που περιέχει γραμμές ή επιφάνειες.

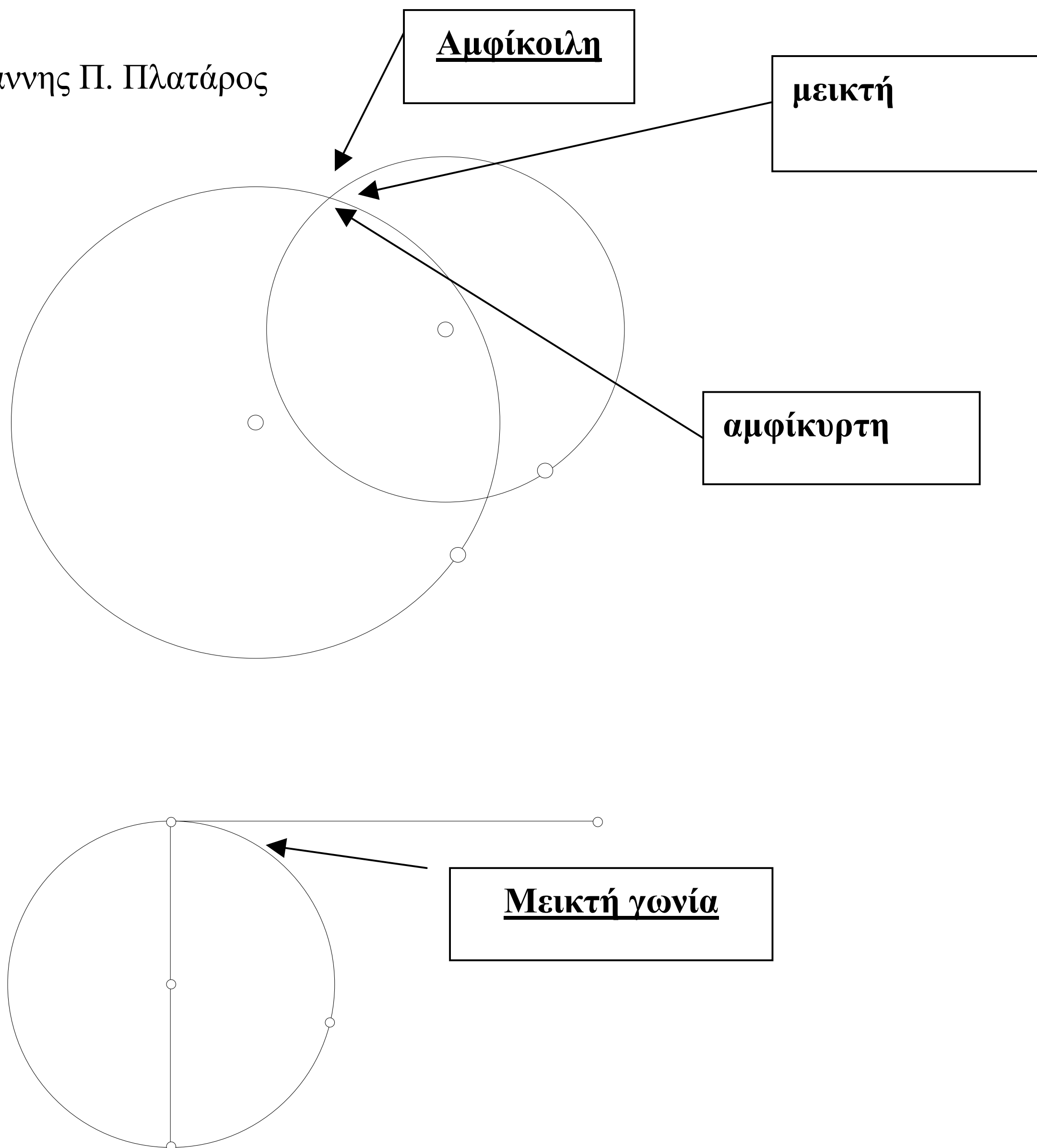
Ο Κάρπος ο Αντιοχεύς, λέει ότι η γωνία είναι μια ποσότητα. Ειδικότερα, ότι είναι η απόσταση των γραμμών ή των επιφανειών που την περιέχουν. Αν και αυτή είναι απόσταση κατά μία έννοια . Η γωνία όμως δεν είναι γραμμή. Διότι κάθε τι που εκτείνεται κατά μία διάσταση δεν είναι γραμμή. Αυτό μάλιστα θα ήταν το πιο παράξενο από όλα, αν δηλαδή υπήρχε δηλαδή μέγεθος διαφορετικό από την γραμμή που να είχε μια μόνο διάσταση.

Στην συνέχεια παρουσιάζει κάποια είδη γωνιών όπως η ιπποπέδη, κισσοειδής και ξυστροειδής, κερατοειδής ,




[33] Εννοεί την κορυφή

[34] Δάσκαλος του Πρόκλου και διευθυντής της Ακαδημίας Πλάτωνος., σύμφωνα με υποσημείωση του G. Morrow




## **Ορισμός 13**

Όριο είναι ό,τι είναι πέρας κάποιου.

Ο όρος όριο (σύνορο) δεν αναφέρεται σε κάθε μέγεθος, (αφού για παράδειγμα, το όριο της γραμμής είναι μάλλον πέρας.) αλλά σε επίπεδες επιφάνειες και στερεά. Ο Ευκλείδης ονομάζει όριο τη γραμμή που περικλείει μια περιοχή και είναι όριο με την έννοια αυτή, όχι όπως το σημείο που λέγεται ότι είναι όριο μιας γραμμής , αλλά ως αυτό που περιβάλει και περικλείει κάτι από αυτά που βρίσκονται γύρω του. Ο όρος αυτός είναι σύμφωνος με την αρχική Γεωμετρία

όπου μετρούσαν τα χωράφια , φρόντιζαν να διατηρούν τα όριά τους διακεκριμένα και από αυτή την δραστηριότητα επινόησαν αυτή την επιστήμη. Έτσι, όταν ο Ευκλείδης ονομάζει την εξωτερική περιβάλλουσα γραμμή όριο, την θεωρεί επίσης και πέρας των επιπέδων χωρίων. Γιατί οτιδήποτε που περιβάλλει, περιορίζεται από την περιβάλλουσα γραμμή. Για τον κύκλο για παράδειγμα, η περιφέρειά του είναι το όριο και το πέρας, αλλά η ίδια η επίπεδη επιφάνεια, είναι μια περιοχή.

## **Ορισμός 14**

Σχήμα είναι αυτό που περιέχεται από κάποιο όριο ή από κάποια όρια.

Επειδή το σχήμα έχει πολλές έννοιες και διαιρείται σε διαφορετικά είδη, πρέπει να εξετάσουμε τις διαφορές αυτές ώστε να φθάσουμε στον ορισμό αυτό. Έτσι ξεκινά ο Πρόκλος και αφού αναφερθεί σε σχήματα υλικά , τέχνης σχήματα , και αφού περιηγηθεί σε φιλοσοφικές διασυνδέσεις με περί ψυχής λόγους σχήματα των θεώ αναφερόμενος στον Πλάτωνα, καταλήγει:
Ο γεωμέτρης (Ευκλείδης) ….το θεωρεί αμέσως ως ενωμένο με την ύλη και εκτεταμένο στην φαντασία και σωστά το ονομάζει περιορισμένο και με σύνορα. Γιατί οτιδήποτε έχει ύλη, είτε νοητή είτε αισθητή, έχει ένα σύνορο που προέρχεται από έξω από τον εαυτό του. Το σχήμα δεν είναι το ίδιο όριο, αλλά είναι περιορισμένο. Δεν είναι δικό του σύνορο, (διότι άλλο είναι το σύνορο, κι άλλο αυτό που έχει σύνορο) ούτε είναι μέσα σ΄αυτό, αλλά συμπεριλαμβάνεται σ΄αυτό. Αφού γεννιέται με ποσότητα και υπόκειται σ΄αυτή , η ποσότητα είναι

το υπόστρωμά του. Ο ορισμός αυτής της ποσότητας είναι το σχήμα. , δηλαδή η μορφή του και το σχήμα του.

Ο Ευκλείδης, ονόμασε σχήμα αυτό που σχηματίζεται, και το ένυλο πράγμα που συνυπάρχει με την ποσότητα το ορίζει ως περιεχόμενο.

Ο Ποσειδώνιος ορίζει το σχήμα ως το περιέχον όριο. Ξεχωρίζοντας την ιδέα του σχήματος από την ποσότητα και κάνοντάς το την αιτία του οριστικού (=που ορίζει , περιορίζει ) Διότι ο παράγοντας που περικλείει είναι άλλος από αυτόν που περικλείεται.

Ο Ευκλείδης λέει ότι ο κύκλος είναι ένα σχήμα που ορίζεται από όλη την επίπεδή του επιφάνεια μαζί με την εξωτερική του περιφέρεια. Άλλος λέει ότι είναι ένα σχήμα λόγω της περιφέρειας. Η μία θεώρηση λέει ότι το σχηματιζόμενο είναι ένα με το υποκείμενό του κι ο άλλος λέει ότι το σχήμα είναι αυτό που περιορίζει κι εγκλείει ποσότητα.

## **Ορισμοί 15, 16 (Κύκλος και κέντρου κύκλου)**

Αφού ενασχοληθεί ο Πρόκλος με φιλοσοφικές θεωρήσεις του κύκλου (χρόνος περίοδος, περιοδικά φαινόμενα, αλλά και λίγο με αριθμολογία) φθάνει στον μαθηματικό ορισμό του κύκλου και λέει:

Ο ορισμός λέει ότι ο κύκλος είναι σχήμα , αφού προφανώς είναι περιορισμένο και περικλείεται σε όλες τις πλευρές από ένα απλό σύνορο και έτσι δεν ανήκει στην φύση του απείρου, αλλά στην φύση του πέρατος. Και είναι επίπεδο σχήμα. Και μάλιστα πρώτο από όλα, αφού περιέχεται μέσα σε μια απλή γραμμή που δεν έχει ποικιλία στα σύνορά της. Μοιάζει έτσι με την μονάδα. Επί πλέον είναι το μόνο σχήμα που από το κέντρο του , όλες οι εκβαλόμενες προς τις πλευρές του είναι ίσες, διότι σε άλλα κάποιες είναι ίσες και κάποιες όχι.

Λέει ακόμα ο Πρόκλος, ότι κύκλος δεν μπορεί να έχει δύο κέντρα.

Τελειώνει δε με φιλοσοφικές και θεολογικές προσεγγίσεις του κύκλου.